Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Blatt 6

Abgabetermin: Freitag, 17.01.2025, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Es seien $X_1, \dots, X_n$ Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{E}[X_i^2] < \infty$ für $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass die Varianz

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$$

existiert und dass

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \operatorname{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

(b) Es seien X und Y Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit $\mathbb{P}(X = 0, Y = 1) = 1/2$, sowie $\mathbb{P}(X = 2, Y = 0) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = 1/4$. Bestimmen Sie $\operatorname{cov}(X, Y)$. Sind X, Y unabhängig?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien X und Y Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Existiert der Erwartungswert von X und Y und gilt $X \leq Y$ mit Wahrscheinlichkeit 1, so folgt $\mathbb{E}X \leq \mathbb{E}Y$.

(b) Gilt $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, so existiert der Erwartungswert von XY und es gilt

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, deren Erwartungswert existiert. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq k).$$

(b) Es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit $X > 0$ und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass für $0 \leq a \leq 1$,

$$\mathbb{P}(X > a\mathbb{E}X) \geq (1-a)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Hinweis: Die Darstellung $X = X\mathbb{1}_{\{X \leq t\}} + X\mathbb{1}_{\{X > t\}}$, sowie Aufgabe 2(b) kann hier nützlich sein.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen auf einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum mit existierenden Erwartungswerten. Beweisen Sie, dass die bedingte Erwartung linear ist, d.h. zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[aY + bZ|X] = a\mathbb{E}[Y|X] + b\mathbb{E}[Z|X].$$

(b) Ein fairer Würfel wird zweimal unabhängig voneinander geworfen. Die Zufallsvariable X beschreibe das Ergebnis des ersten Wurfs, Y das Ergebnis des zweiten. Bestimmen Sie für $k = 1, \dots, 6$ den bedingten Erwartungswert

$$\mathbb{E}[\max\{X, Y\}|Y = k].$$

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

(a) Es sei X eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für alle $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \inf_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-ta}\mathbb{E}[e^{tX}].$$

(b) Für $p \in (0, 1)$ seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt zum Parameter p. Zeigen Sie, dass für beliebiges $\delta > 0$ die *Chernoff-Ungleichung*

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq (1 + \delta)pn\right) \leq \exp\left(L(\delta)pn\right)$$

gilt, wobei $L(\delta) = \delta - (1 + \delta)\log(1 + \delta) < 0$.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie die *Kovarianz* und den *Korrelationskoeffizienten* zweier diskreter Zufallsvariablen X und Y.

(ii) Was versteht man unter der *bedingten Verteilung von Y gegeben $X = x$*?

(iii) Definieren Sie den *bedingten Erwartungswert* von Y gegeben $X = x$.

(iv) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

(v) Welcher Größe entspricht $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y|X]]$?