Übungen zur Vorlesung
“Stochastik I“

Blatt 5

Abgabetermin: Freitag, 20.12.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X_1, X_2 zwei unabhängig Zufallsvariablen auf Ω. Beweisen Sie:

(a) Sind $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ und X_i Poisson-verteilt zum Parameter λ_i, $i = 1, 2$, so ist die Summe $X_1 + X_2$ Poisson-verteilt zum Parameter $\lambda_1 + \lambda_2$.

(b) Für X_1, X_2 wie in Teil (a) ist X_1 gegeben $X_1 + X_2 = l$ binomialverteilt mit Parameter $n = l$ und $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$, d.h. für alle $k = 0, 1, \ldots, l$ gilt

$$\mathbb{P}\left(X_1 = k \mid X_1 + X_2 = l\right) = \binom{l}{k} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^{l-k}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen auf Ω. Zeigen Sie:

(a) Für Funktionen $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, sind die Zufallsvariablen $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig.

(b) Für $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sind die Zufallsvariablen $g(X_1, X_2), X_3, \ldots, X_n$ unabhängig.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und X, Y Zufallsvariablen auf Ω. Beweisen Sie:

(a) Gilt $\mathrm{Var}(X) = 0$, so ist $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}X) = 1$, d.h. X ist mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant.

(b) Gilt für beliebige $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$

$$X(\omega_1) < X(\omega_2) \;\Rightarrow\; Y(\omega_1) \leq Y(\omega_2),$$

so sind X und Y positiv korreliert sind, d.h. es gilt $\mathrm{Cov}(X, Y) \geq 0$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $0 < \mathrm{Var}(X_i) \leq c \in \mathbb{R}$ für alle $i \in \mathbb{N}$, für die zusätzlich gilt, dass

$$\rho_{ij} := \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } |i-j| \to \infty.$$

Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz großer Zahlen genügt, d.h. dass für beliebiges $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)\right| > \epsilon\right) = 0.$$

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was besagen die *Markov-* und die *Chebychev-Ungleichung*?

(ii) Wann sind zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 *unabhängig*?

(iii) Unter welcher Voraussetzung gilt $\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2)$?

(iv) Formulieren Sie das *schwache Gesetz der großen Zahlen.*

(v) Beweisen Sie das schwache Gesetz der großen Zahlen.