Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 22.11.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ unabhängige Ereignisse. Wir definieren $B_i^0 := A_i$ und $B_i^1 := A_i^c$ für $i = 1, \ldots, n$. Für $1 < k < n$ wählen wir Teilmengen $R \subset \{0,1\}^k$, $S \subset \{0,1\}^{n-k}$ und definieren

$$B = \sum_{r \in R} B_1^{r_1} \cap \cdots \cap B_k^{r_k} \qquad \text{und} \qquad C = \sum_{s \in S} B_{k+1}^{s_1} \cap \cdots \cap B_n^{s_{n-k}}.$$

Zeigen Sie, dass B und C unabhängig sind.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 100\}$ werden zufällig zwei Zahlen (x, y) herausgegriffen (ohne Zurücklegen, d.h. $x \neq y$). Geben Sie einen geeigneten Grundraum für dieses Experiment an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass $\max\{x, y\} \geq 70$, wenn Sie bereits wissen, dass $\min\{x, y\} \leq 30$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Seien $\mathbb{P}(B) > 0$ und eine Abbildung $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, \infty]$ durch

$$\mathbb{P}_B(A) := \mathbb{P}(A \mid B)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}_B$ ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ ist.

(b) Seien $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisse mit $0 < \mathbb{P}(B) < 1$ und $\mathbb{P}(A) < \mathbb{P}(A \mid B)$. Zeigen Sie, dass dann $\mathbb{P}(A) > \mathbb{P}(A \mid B^c)$ gilt.

(c) Seien $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ Ereignisse mit $\mathbb{P}(A \cap B) > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \mid A)\mathbb{P}(C \mid A \cap B).$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Ein medizinischer Test wird genutzt, um zu diagnostizieren, ob eine bestimmte Krankheit K bei dem untersuchten Patienten P vorliegt. Der Test liefert in 99% aller Fälle, in denen der Patient P von der Krankheit K betroffen ist, einen positiven Befund (d.h. er prognostiziert die Krankheit korrekt). Ebenso liefert er in 99% der Fälle, in welcher der Patient P nicht von der Krankheit K betroffen ist, einen negativen Befund. Wir unterscheiden nun zwei Patientengruppen:

(i) In der ersten Gruppe ist im Mittel eine von 1250 Personen von der Krankheit K betroffen.

(ii) In der zweiten Gruppe ist im Mittel jeder fünfzigste an K erkrankt.

Bestimmen Sie in beiden Fällen (i) und (ii) die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit positivem Testergebnis tatsächlich erkrankt ist.

(b) Zur Zeit $t = 0$ enthalte eine Urne genau zwei Kugeln, eine rote und eine schwarze. Zur Zeit $t = 1$ wird eine der Kugeln zufällig gezogen und zusammen mit einer weiteren Kugel derselben Farbe zurückgelegt. Dieses Verfahren wird für die Zeitpunkte $t = 2, 3, \dots, n$ wiederholt (sodass zur Zeit $t = n$ genau $n + 2$ Kugeln in der Urne liegen). Bestimmen Sie

$$p_{n,r} = \mathbb{P}(\text{ Zur Zeit } n \text{ liegen } r \text{ rote Kugeln in der Urne})$$

für $n = 1, 2, \dots$ und $r = 1, 2, \dots, n + 1$.

Hinweis: Definieren Sie $q_{n,r} := (n + 1)! p_{n,r}$ und leiten Sie mithilfe der Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit die Rekursion

$$q_{n,r} = (n + 1 - r)q_{n-1,r} + (r - 1)q_{n-1,r-1}$$

her und lösen Sie diese.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie, wann Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ *unabhängig* sind.

(ii) Was versteht man unter dem *Produkt-Wahrscheinlichkeitsmaß*?

(iii) Definieren Sie die *bedingte Wahrscheinlichkeit* $\mathbb{P}(A \mid B)$.

(iv) Zwei faire Würfel werden unabhängig voneinander geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, dass die Summe der beiden Würfelergebnisse durch drei teilbar ist, wenn der erste Würfel eine 2 zeigt?

(v) Was besagt die *Formel von Bayes*?