Übungen zur Vorlesung "Stochastik I"

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 08.11.2024, bis 10.15 Uhr, Briefkästen Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $\Omega \neq \emptyset$ ein abzählbarer Grundraum und $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie in den folgenden Beispielen, dass es sich bei p um die Zähldichte eines Wahrscheinlichkeitsmaßes handelt:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ und $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ definieren wir

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

(b) Für $\lambda > 0$ und $\Omega = \mathbb{N} \cup \{0\}$ setzen wir

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

(c) Für $p \in (0,1)$ und $\Omega = \mathbb{N}$ setzen wir

$$p(k) = p(1-p)^{k-1}.$$

(d) Es seien $N, K, n \in \mathbb{N}$ mit $K, n \leq N$ und

$$\Omega = \{\max\{0, n-(N-K)\}, \max\{0, n-(N-K)\}+1, \ldots, \min\{n, K\}-1, \min\{n, K\}\},$$

sowie $p : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$p(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine weiße und eine schwarze Schachfigur werden zufällig auf einem Schachfeld platziert (wobei sie nicht auf dem gleichen Feld stehen dürfen und jede mögliche Felderkombination die gleiche Wahrscheinlichkeit hat). Wie wahrscheinlich ist es, dass sich diese Figuren gegenseitig schlagen können, falls es sich dabei um

(a) zwei Türme,

(b) zwei Läufer,

(c) zwei Damen

handelt? Geben Sie einen geeigneten Grundraum Ω an und formalisieren Sie die Ereignisse als Teilmengen.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien A, B endliche Mengen mit $|A| \leq |B| < \infty$. Bestimmen Sie die Anzahl der surjektiven Abbildungen $B \longrightarrow A$.
Hinweis: Nutzen Sie die Ein- und Ausschlussformel (Blatt 1, Aufgabe 4).

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sie fahren täglich mit dem Fahrrad zur Universität. Angenommen, die Wahrscheinlichkeit einer Panne am Tag n sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Prozent ($p = 0.01$). Wie wahrscheinlich ist es, dass Sie ein Jahr lang (d.h. an 250 Arbeitstagen) ohne Panne mit dem Rad zur Uni kommen? Wie wahrscheinlich ist es, am letzten Arbeitstag die zehnte Panne zu haben?

(b) Es sei $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, mit endlichem Grundraum Ω und Laplace-Verteilung $\mathbb{P}$. Bestimmen Sie die Anzahl an Paaren (A, B) von unabhängigen Ereignissen $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $0 < \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B) < 1$ in den folgenden Fällen:

(i) $|\Omega| = 6$,

(ii) $|\Omega| = 7$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter der *Laplace-Verteilung*?

(ii) Ein fairer Würfel wird zehnmal geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, genau drei Sechsen zu würfeln?

(iii) Definieren Sie, wann zwei Ereignisse $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *unabhängig* sind.

(iv) Es seien $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A) = 1/5$ und $\mathbb{P}(A \cup B) = 1/2$. Bestimmen Sie $\mathbb{P}(B)$ und $\mathbb{P}(A \cap B^c)$.