UNI FREIBURG

## Wahrscheinlichkeitstheorie III **Wintersemester 2024/25**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

# Übungsblatt 9

**Abgabe: Freitag, 20.12.2024.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Sei $W$ eine Standard-Brown'sche Bewegung auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ und $H$ ein beschränkter, previsibler Prozess. Sei $X$ ein stochastischer Prozess, definiert durch

$$X_t = \int_0^t H_s\,ds + W_t.$$

Definiere das Wahrscheinlichkeitsmaß $Q$ durch

$$\frac{dQ}{dP} = e^{-\int_0^T H_s\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T H_s^2\,ds},$$

mit $T > 0$. Zeigen Sie, dass $X$ unter $Q$ eine Standard-Brown'sche Bewegung bis zum Zeitpunkt $T$ ist.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Sei $S$ ein Finanzmarkt auf $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ für $P \in \mathscr{P}$.

1. Zeigen Sie: $NA(\{P\})$ für alle $P \in \mathscr{P} \Rightarrow NA(\mathscr{P})$.
2. Geben Sie ein Beispiel, sodass $NA(\{P\})$ für alle $P \in \mathscr{P}$ nicht erfüllt ist, aber $NA(\mathscr{P})$ gilt.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Sei $S$ das CRR Model aus Aufgabe 3 Blatt 3 zu $T = 1$ zu fixem $a, b \in \mathbb{R}$, sodass $-1 < a < b$. Weiter sei $\mathscr{P}$ die Menge aller Maße auf $\Omega = \{-1, 1\}$, sodass $P(\{\omega\}) > 0$. Zeigen Sie, dass $\mathscr{P}$ konvex ist und dass gilt $NA(P) \Leftrightarrow NA(P') \Leftrightarrow NA(\mathscr{P})$ für alle $P, P' \in \mathscr{P}$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Betrachte nun $\Omega = \{-1, 1\} \times \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}, -1 < a < b\}$ und definiere

$$R_1(\omega) := \begin{cases} a, & \text{wenn } \omega = (-1, (a, b)) \\ b, & \text{wenn } \omega = (+1, (a, b)) \end{cases}$$

Der Preisprozess wird modelliert als

$$S_1 := S_0(1 + R_1),$$

wobei der Anfangswert $S_0 > 0$ eine gegebene Konstante ist. Sei nun die Menge $\mathscr{P}$ gegeben durch

$$\mathscr{P} = \{P = P_1 \otimes P_{a,b} \mid P_1(\{-1\}) = 1 - P_1(\{1\}) \in (0, 1), P_{(a,b)} = \delta_{\{(a,b)\}}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathscr{P}$ nicht konvex ist und damit das robuste CRR Modell nicht den Annahmen des robusten FTAP der Vorlesung genügt.