UNI FREIBURG

Wahrscheinlichkeitstheorie III **Wintersemester 2024/25**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 7

Abgabe: Freitag, 06.12.2024.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.** Betrachten Sie ein d-dimensionales Black-Scholes-Modell

$$dS_t = S_t \sigma dW_t,$$

wobei $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ invertierbar ist und W eine d-dimensionale Brownsche Bewegung unter Q darstellt. Auf der rechten Seite wird S_t als Diagonalmatrix mit den Einträgen S^i_t betrachtet.

Zeigen Sie, dass S ein polynomieller Prozess ist, d.h. für alle $s \le t$ und jedes Polynom p vom Grad n gilt:

$$E[p(S_t)|\mathscr{F}_s] = q(S_s),$$

wobei q ein Polynom vom Grad $\le n$ ist, dessen Koeffizienten Funktionen von $t-s$ sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Finden Sie zum Setting aus Aufgabe 1 den Hedge für eine Auszahlung der Form $p(S_T)$, wobei p ein Polynom ist, d.h. die Handelsstrategie $H = (H^1, \dots, H^d)$, sodass $p(S_T) = \pi_0 + (H \cdot S)_T$, wobei π_0 den Preis von $p(S_T)$ zum Zeitpunkt Null darstellt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeige, dass der Prozess ρ, gegeben durch

$$\rho_t = e^{(t-t_0)\beta} x + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta} \alpha(s)\, ds + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)\beta} \sigma\, dW_s,$$

für $\rho_{t_0} = x$, eine Lösung des *Hull-White-extended Vasicek-Modells* ist, das durch die SDE

$$d\rho_t = (\alpha(t) + \beta\rho_t)\, dt + \sigma\, dW_t$$

gegeben ist, wobei W eine Brownsche Bewegung, $\beta \in \mathbb{R}$ der Drift, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ die Volatilität und $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ die Hull-White-Erweiterung ist.