Wahrscheinlichkeitstheorie III

Wintersemester 2024/25

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 28.11.2024.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die folgenden diskontierten Finanzmarktmodelle ein äquivalentes lokales Martingalmaß bis T besitzen. Im Folgenden sei W eine Standard-Brownsche Bewegung mit ihrer natürlichen Filtration.

1. Heston-Modell. Der Preisprozess ist gegeben durch

   $$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\nu_t} S_t dW_t$$

   mit Anfangswert $S_0 > 0$, wobei der Varianzprozess ν ein Cox-Ingersoll-Ross-Prozess ist:

   $$d\nu_t = \kappa(\theta - \nu_t)dt + \xi\sqrt{\nu_t}dB_t$$

   mit Anfangswert $\nu_0 > 0$ und Konstanten $\kappa, \theta, \xi > 0$. Der Prozess B ist eine weitere Standard-Brownsche Bewegung. Wir nehmen an, dass $2\kappa\theta > \xi^2$ gilt, was sicherstellt, dass der Varianzprozess ν strikt positiv ist. Das Heston-Modell ist ein Beispiel für ein stochastisches Volatilitätsmodell.

2. Bergomi-Modell. Der Preisprozess ist gegeben durch

   $$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{\xi_t} S_t dW_t$$

   mit Anfangswert $S_0 > 0$, wobei die momentane Varianz ξ durch

   $$d\xi_t = \omega \xi_t dB_t$$

   mit Anfangswert $\xi_0 > 0$ gegeben ist. Hier ist $\omega > 0$ ein Skalierungsfaktor, und B ist eine weitere Standard-Brownsche Bewegung.

Aufgabe 2 (CIR-Prozess; 4 Punkte)**.**

1. Überprüfen Sie die Zulässigkeitsbedingungen in [2], um herauszufinden, unter welchen Bedingungen an $b, \beta, \sigma \in \mathbb{R}$ ein affinierter Prozess X auf $\mathbb{R}_+$ existiert, der

   $$dX_t = (b + \beta X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

   für eine Brownsche Bewegung W erfüllt.

2. Schreiben Sie die Funktionen F und R auf, die diesen Parametern gemäß [1, Theorem 7] oder [2, Theorem 2.7] zugeordnet sind, und finden Sie Lösungen $\phi, \psi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ der Riccati-Gleichungen

   $$\partial_t \phi(t,u) = F(\psi(t,u)), \qquad \partial_t \psi(t,u) = R(\psi(t,u)).$$

   Hinweis: Sie können die Lösungen ϕ, ψ in der Literatur finden und überprüfen, dass sie die Riccati-Gleichungen erfüllen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t \nearrow 1} E[B_t] = 0$.

References

[1] Christa Cuchiero and Josef Teichmann. "Path properties and regularity of affine processes on general state spaces". In: *Séminaire de Probabilités XLV*. Springer, 2013, pp. 201–244.

[2] Darrell Duffie, Damir Filipović, and Walter Schachermayer. "Affine processes and applications in finance". In: *Annals of applied probability* (2003), pp. 984–1053.