Wahrscheinlichkeitstheorie III

Wintersemester 2024/25

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 22.11.2024.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(s)f(s)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t, \quad X_0 = x.$$

Aufgabe 2 (Siegels Paradoxon; 4 Punkte)**.** Bezeichne mit $\$_t$ den Preis eines US-Dollars in Euro zum Zeitpunkt t und mit $€_t$ den Preis eines Euros in US-Dollar. Angenommen, es gilt

$$\$_0 = 1, \quad d\$_t = \$_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

für einen Wiener-Prozess W_t.

1. Leite die SDE für € ab.
2. Sei $\sigma^2 > \mu$. Berechne $E[\$_t - \$_0]$, d.h. den erwarteten Gewinn in Euro aus einer Investition von 1 US-Dollar. Ist der US-Dollar aus dieser Perspektive eine attraktive Investition? Berechne außerdem $E[€_t - €_0]$, d.h. den erwarteten Gewinn in US-Dollar aus der Sicht eines US-Investors. Ist der Euro aus letzterer Sicht eine attraktive Investition?

Aufgabe 3 (Black-Scholes-Formel; 4 Punkte)**.** Seien $(U_i)_{i=0,\dots,N}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit $U_i \sim N(0,1)$ für jedes $i = 0,\dots,N$. Sei ferner $(S_n)_{n=0,\dots,N}$ definiert durch

$$S_n = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)n + \sigma \sum_{i=1}^n U_i\right), \quad n = 0,\dots,N,$$

wobei $r \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ reelle Konstanten sind. Betrachten Sie die Filtration $(\mathcal{F}_n)_{n=0,\dots,N}$, gegeben durch $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0,\dots,S_n)$ für $n = 0,\dots,N$. Zeigen Sie, dass

$$E[e^{-r(N-n)}(S_N - K)^+ \mid \mathcal{F}_n] = S_n \Phi(d_1(S_n)) - Ke^{-r(N-n)}\Phi(d_2(S_n)),$$

wobei Φ die kumulative Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ ist, definiert durch

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad x \in \mathbb{R},$$

und wobei folgende Notation verwendet wird:

$$d_1(x) = \frac{\ln(\frac{x}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\theta}{\sigma\sqrt{\theta}},$$
$$d_2(x) = d_1(x) - \sigma\sqrt{\theta}$$

mit $\theta = N - n$.