Wahrscheinlichkeitstheorie III

Wintersemester 2024/25

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag, 01.11.2024.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Wir nehmen an, dass $Q \ll P$ auf $\mathscr{F}$ mit Dichte φ und $\mathscr{F}_0 \subseteq \mathscr{F}$. Dann gilt für jedes $\in \mathscr{F}$-messbare X, dass

$$E_Q[X|\mathscr{F}_0] = \frac{1}{E_P[\varphi|\mathscr{F}_0]} E_P[X\varphi|\mathscr{F}_0].$$

Sei $(X^0, \dots, X^d)$ der diskontierte Preisprozess eines arbitrage-freien Finanzmarktes.

Definition 1. Eine reelle Zahl $\pi^H \geq 0$ heißt arbitrage freier Preis eines diskontierten claims H, falls ein Prozess X^{d+1} existiert, sodass

$$X_T^{d+1} = H, \quad ,X_0^{d+1} = \pi^H, \quad X_t^{d+1} \geq 0,$$

derart, dass der erweiterte Finanzmarkt $(X^0, X^1, \dots, X^d, X^{d+1})$ arbitrage-frei ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Menge der arbitrage freien Preise nicht leer ist und gegeben ist durch

$$\Pi(H) = \{E_Q[H] | Q \in \mathcal{M}_e, E_Q[H] < \infty\}.$$

Zeigen Sie weiter, dass

$$\pi_{inf} := \inf \Pi(H) = \inf_{Q \in \mathcal{M}_e} E_Q[H], \quad \pi_{sup} := \sup \Pi(H) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_e} E_Q[H].$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, ist ein diskontierte claim H replizierbar, dann besteht die Menge $\Pi(H)$ aus einem Element gegeben durch V_0, wobei V der Value Prozess jeder replizierbaren Strategie ist. Insbesondere ist V ein Martingal unter jedem äquivalenten Martingalmaß.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Betrachte ein arbitragefreies Marktmodell mit Preisprozess S^1 und einem risikolosen Numéraire $S_t^0 = (1 + r)^t$, für ein $r > -1$. Angenommen, dass ein arbitrage-freier Preis π_{call} für den diskontierten claim $H_{\text{call}} = \frac{(S_1^T - K)^+}{S_0^T}$ einer europäischen Kaufoption mit Ausübungspreis $K \geq 0$ festgelegt wurde. Dann existiert ein nicht-negativer Prozess X^2 mit $X_0^2 = \pi_{\text{call}}$ und $X_T^2 = H_{\text{call}}$, so dass das erweiterte Marktmodell mit diskontiertem Preisprozess (X^0, X^1, X^2) arbitragefrei ist.

Zeigen Sie, dass der diskontierte claim $H_{\text{put}} = \frac{(K - S_1^T)^+}{S_T^0}$ im erweiterten Modell replizierbar ist und dass sein eindeutiger arbitrage freier Preis durch

$$\pi_{\text{put}} = K/(1 + r)^T - S_1^0 + \pi_{\text{call}}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5 (2 Punkte)**.** Wir betrachten ein arbitrage freies Finanzmarktmodell mit $S_T^0 = (1 + r)^T$. Sei $C^{call} = (S^i - K)^+$ eine Call Option und $C^{put} = (S^i - K)^+$ eine Put Option auf den $i$ten Vermögenswert mit Strike K. Definiere $H^{call} = C^{call}/(1 + r)^T$ und $H^{put} = C^{put}/(1 + r)^T$. Zeigen Sie, dass

$$\Pi(H^{call}) \subseteq [(S_0^i - \tfrac{K}{(1+r)^T})^+, S_0^i], \quad \Pi(H^{put}) \subseteq [(\tfrac{K}{(1+r)^T} - S_0^i)^+, \tfrac{K}{(1+r)^T}].$$