THORSTEN SCHMIDT

STOCHASTISCHE PROZESSE

UNIVERSITÄT FREIBURG

Einführung

Diese Vorlesung ist eine Fortführung der Vorlesung Stochastische Prozesse aus dem Wintersemester 20/21.

Ziel dieses Kurses ist eine solide Grundlage für die stochastische Integration in d Dimensionen zu entwickeln. Es wird sich zeigen, dass die allgemeinsten Prozesse, mit denen das geht, Semimartingale sind. *Semimartingale* sind ein weiterer Hauptgegenstand dieser Vorlesung. Etwas später werden wir noch *Markov*-Prozesse kennenlernen, hier kann die Theorie sogar etwas allgemeiner entwickelt werden (jenseits des $\mathbb{R}^d$).

Dieses Skriptum ist vorläufig ! Es enthält offensichtlich noch viele Fehler – also bitte mit dem entsprechenden Fingerspitzengefühl lesen. Für Rückmeldungen sind wir natürlich äußerst dankbar und würden uns über eine Email an das Sekretariat Stochastik freuen.

Thorsten Schmidt

Stochastische Prozesse

In dieser Vorlesung geht es um eines der spannendsten Objekte in der Stochastik und deren Anwendung: Dynamische Prozesse, die sich über die Zeit entwickeln. Dafür gibt es natürlich viele Beispiele - In unserem eigenen Körper etwa, wenn wir einen Kaffee trinken und der Koffeinspiegel im Körper gemessen wird, oder gleichermaßen alle medizinischen Größen. Wenn man Krankheiten feststellen oder erkennen will muss man in der Lage sein, solche Abläufe zu beschreiben. Das besondere ist nun, dass der Verlauf nicht jedes mal der gleich ist, sondern von vielen Faktoren abhängt, die wir nicht kennen - dies modellieren wir durch einen *zufälligen Ablauf*.

Andere Beispiele sind etwa Temperaturverläufe - besonders wichtig angesichts der Klimakrise. Was sind die entscheidenden Faktoren ? Wann werden Kipp-punkte erreicht - oder wie modelliert man Kipp-punkte überhaupt. Und - was hat das mit uns zu tun - ja, wie wird das das Wetter in Freiburg beeinflussen... Es gibt noch unzählige weitere Beispiele: Die Bewegung von Autos im Verkehr (geschätzt aus den gemessenen und fehlerbehafteten GPS-Daten), Aktienkurse, die Entwicklung eines Schadenbestandes einer Versicherung, usw.

Ein äußerst wichtiges Hilfsmittel zur Beschreibung von dynamischen, deterministischen Systemen sind (partielle) Differentialgleichungen. Für stochastische Prozesse ist dieser Begriff nicht so einfach zu entwickeln und wird ein Hauptgegenstand dieser Vorlesung sein. Schlüssel hierzu ist allerdings der Begriff des Integrals, welchem wir uns demnach zuerst zuwenden.

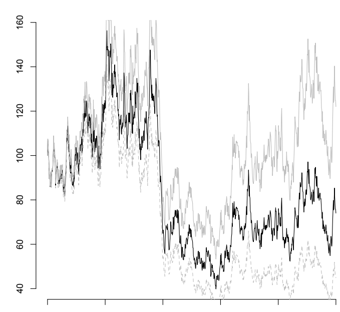

Abbildung 1: Eine geometrische Brownsche Bewegung - das berühmte Black-Scholes-Merton-Samuelson Modell. Gezeigt werden Pfade mit unterschiedlichen Volatilitäten

Auf dem Weg zum Integral. Die klassische Integration geht wir folgt: Wir diskretisieren $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, und erhalten

$$\sum_{i=1}^{n} \phi_{t_{i-1}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}) \longrightarrow \int \phi \, dX.$$

Hierfür benötigen wir aber, dass X von endlicher Variation ist. Denn dann kann man $dX = dX^+ - dX^-$ mit einem signierten Maß Borelmaß identifizieren und erhält das obige Integral aus den Ergebnissen der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie. Ist X allerdings eine Brownsche Bewegung (siehe Abbildung 1), so ist $X(\omega)$ von unendlicher Variation und wir können das Integral nicht in dieser Form berechnen.

Einführung

Sei $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und (E, d) ein separabler, vollständiger, metrischer Raum mit der Borel-σ-Algebra $\mathscr{E} = \mathscr{B}(E)$. Meistens ist $E = \mathbb{R}^d$.

Definition 1. Ein *stochastischer Prozess* X mit Werten in E ist eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ von E-wertigen Zufallsvariablen.

Wir schreiben entweder $X, (X_t)$ oder $(X_t)_{t \geq 0}$, aber nie (!) X_t für den stochastischen Prozess, da es sich bei X_t ja um den Wert von X an t handelt (eine Zufallsvariable).

Die Abbildung $t \mapsto X_t(\omega)$ für ein festes $\omega \in \Omega$ heißt *Pfad* von X. Prozesse in diskreter Zeit, etwa $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sind ein Spezialfall: wir setzen diese Prozesse konstant fort und erhalten ein Prozess in stetiger Zeit.

Begriffe wie Filtration, Martingal, Stoppzeiten kennen wir bereits in diskreter Zeit. Nun werden wir sie allgemeiner in stetiger Zeit, auf der Indexmenge $\{t : t \geq 0\}$ formulieren[1].

[1] Wir definieren die wichtigen Begriffe Filtration und stochastische Basis - die Filtration ist unser Hauptkonzept um die an einem Zeitpunkt t zur Verfügung stehende Information (d.h. die messbaren (also an t bekannten) Zufallsvariablen zu beschreiben

Definition 2 (Filtrationen)**.** Wir definieren folgende Begriffe:

(i) Eine *Filtration* $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$ ist eine wachsende Folge von Sub-σ-Algebren,
$$\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}, \qquad 0 \leq s \leq t.$$

(ii) Eine Filtration heißt rechtsstetig, falls jedes $\mathscr{F}_t = \bigcap_{u>t} \mathscr{F}_u$ für $t \geq 0$.

(iii) Ist $\mathbb{F}$ eine rechtsstetige Filtration, so nennen wir $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{F}, P)$ eine stochastische Basis.

(iv) Die stochastische Basis erfüllt die *üblichen Bedingungen* falls $\mathscr{A}$ P-vollständig ist (Teilmengen von Nullmengen sind messbar) und jedes $\mathscr{F}_t$ enthält alle Nullmengen.

Im Folgenden arbeiten wir auf einer stochastischen Basis mit den üblichen Bedingungen. Wir werden hauptsächlich Prozesse betrachten die rechtsstetig sind und bei denen ein linker Grenzwert existiert. Sonst entstehen unnatürliche Sprünge.

Technisch gesehen sind wir mit diesen Prozessen in der Lage Separabilität zu erreichen, und können dann auf polnischen Räumen arbeiten. Hierzu folgende Definition.

Definition 3 (Prozessklassen)**.**

(i) Ein stochastischer Prozess heißt càd (continue à droite) falls fast alle Pfade rechtsstetig sind. Er heißt càg, falls fast alle Pfade linksstetig sind.

(ii) Ein stochastischer Prozess heißt càdlàg, falls er càd ist und fast sicher linksseitige Limiten besitzt. f besitzt linke Limites, falls $\lim_{s \uparrow t} f(s)$ existiert für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 1 (Messbarkeit)**.** Ist X càdlàg für alle $\omega \in \Omega$ und $A = \{\omega \in \Omega : X \text{ stetig auf } [0,1]\}$ dann folgt $A \in \mathscr{F}_1^X = \sigma(X_s : 0 \leq s \leq 1)$. Ist X nur fast sicher càdlàg, so gibt es ein Gegenbeispiel. Allerdings folgt obige Behauptung auch, falls man ein P-vollständiges $\mathscr{F}_1$ mit $\mathscr{F}_1^X \subset \mathscr{F}_1$ besitzt.

Im Folgenden betrachten wir ja dynamische Systeme, so dass wir jede Teilmenge von $\Omega \times \mathbb{R}_+$ eine *zufällige Menge* nennen.

Definition 4. (i) Eine zufällige Menge heißt *verschwindend* falls

$$P(\{\omega \in \Omega : \exists t \geq 0 \quad \text{mit } (\omega, t) \in A\}) = 0$$

(ii) Zwei stochastische Prozesse heißen *ununterscheidbar*, falls die Menge

$$\{X \neq Y\} = \{(\omega, t) : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$$

verschwindet.

(iii) (schwächere Bedingung) X heißt Modifikation von Y, falls $P(X_t \neq Y_t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Ist X eine Modifikation von Y, so haben beide Prozesse die gleichen endlich-dimensionalen Randverteilungen. Diese sind eine projektive Familie und wir können den Existenzsatz von Kolmogorov aus der Wahrscheinlichkeitstheorie anwenden.

Aufgabe 2 (Modifikationen)**.** Seien X und Y ununterscheidbar, dann ist X Modifikation von Y. Ist umgekehrt X eine *Modifikation* von Y und sind X und Y càd, so sind X und Y auch ununterscheidbar.

Zu einem (càd)làg Prozess X definieren wir $X_- = (X_{t-})_{t \geq 0}$ mit $X_- = \lim_{s \uparrow t} X_s$ und $X_{0-} = 0$ und den Prozess der Sprünge als $\Delta X = X - X_-$. Ein Prozess heißt $\mathbb{F}$-adaptiert falls X_t $\mathscr{F}_t$-messbar ist für alle $t \geq 0$.

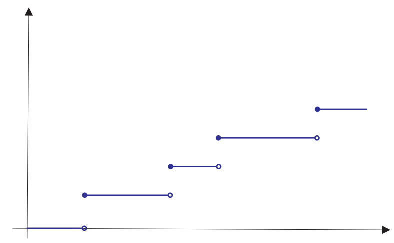

Abbildung 2: Ein Pfad eines Poissonprozesses. Ein typisches Beispiel für einen cád-Prozess. Außerdem hat der Prozess endliche Variation, so dass wir unmittelbar ein Integral definieren können.

Poissonprozesse

Definition 5 (Poissonprozess). Ein adaptierter, càdlàg Prozess X mit Werten in $\mathbb{N}$ heißt *erweiterter Poissonprozess*, falls

(i) $X_0 = 0$,

(ii) $\Delta X_t \in \{0, 1\}$,

(iii) $E[X_t] < \infty$ für alle $t \geq 0$,

(iv) $X_t - X_s$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s$, für $0 \leq s \leq t$.

Wir definieren die *kumulierte Intensität* Λ des Poisson-Prozesses X durch

$$\Lambda(t) = E[X_t], \qquad t \geq 0.$$

X heißt *Poisson-Prozess* mit Parameter $\lambda > 0$, falls $\Lambda(t) = \lambda t,\ t \geq 0$. Falls

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\, ds, \qquad t \geq 0$$

gilt, so heißt λ die *Intensität* von X. Hierbei darf λ variieren (z.B. Anzahl an Unfällen ist im Winter höher als im Sommer). X heißt Standard Poissonprozess, falls $\lambda = 1$. Etwas überraschend kann man aus der Unabhängigkeit der Zuwächse von der Vergangenheit bereits ablesen, dass die Zuwächse Poisson verteilt sind, zumindest wenn Λ stetig ist. Wir betrachten lediglich den Fall eines Poisson-Prozesses mit konstanter Intensität. Einen eleganten Beweis für die Verteilung von $X_t - X_s$ für verallgemeinerte Poisson-Prozesse findet sich in Theorem II.4.5 in [2].

[2] J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 2003

Für unseren, einfacherern Beweis nehmen wir zusätzlich an, dass X *stationäre Zuwächse* hat, also für alle $t, h \geq 0$, gilt, dass

$$X_{t+h} - X_t \stackrel{\mathscr{L}}{=} X_h.$$

Lemma 6. *Sei X ein Poisson Prozess mit Intensität* λ. *Hat X identisch verteilte Zuwächse, so gilt* $X_t - X_s \sim \text{Poiss}(\lambda \cdot (t-s))$, *für* $0 \leq s \leq t$.

Beweis. Zunächst einmal folgt aus den identisch verteilten Zuwächsen, dass $E[X_t] = tE[X_1]$, und somit, dass $\Lambda(t) = \lambda t$ ist. Die Aussage des Grenzwertsatzes von Poisson ist, dass

$$\text{Bin}(n, p_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} \text{Poiss}(\lambda), \qquad \text{falls } n \cdot p_n \to \lambda.$$

Für den Beweis verwenden wir den Grenzwertsatz von Poisson. Im Gegensatz zum zentralen Grenzwertsatz wird hier nicht mit $n^{-1/2}$ skaliert, sondern die Parameter der Binomialverteilung variiert (Siehe etwa Beispiel 11.1 im Skript von Peter Pfaffelhuber).

Wir fixieren $t > 0$ und setzen

$$Z_k^n = \left(X_{\frac{kt}{n}} - X_{\frac{(k-1)t}{n}} \right) \wedge 1;$$

hierbei ist $Z_k^n = 1$, falls mindestens ein Sprung in dem Intervall $((k-1)t/n, kt/n]$ liegt, und Null sonst. Dann sind die $Z_1^n, Z_2^n, \ldots, Z_n^n$ Bernoulli-verteilte Größen. Da X adaptiert ist und Zuwächse hat, die von der Vergangenheit unabhängig sind, sind sie auch unabhängig. Nach Annahme sind die Zuwächse auch identisch verteilt, so dass

$$X_t^n = \sum_{k=1}^{n} Z_k \sim \text{Bin}(n, p_n)$$

mit $p_n = E[Z_k^n] = E[Z_1^n] = P(X_{t/n} \geq 1)$. Daraus folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lim_{n\to\infty} E[X_t^n] = E[\lim_{n\to\infty} X_t^n] = E[X_t] = \lambda t$$

wegen monotoner Konvergenz und $X_t^n \uparrow X_t$. □

Gibt es einen solchen Poissonprozess immer ? Die Antwort ist ja: Man kann einen Poisson-Prozess geschickt über exponentialverteilte Zufallsvariablen erzeugen[3].

[3] Natürlich stellt sich die gleiche Frage auch für einen verallgemeinerten Poissonprozess. Was würden Sie hierzu sagen ?

Satz 7. *Seien* $E_1, E_2, \ldots$ *i.i.d.* $\sim \text{Exp}(\lambda)$ *mit* $\lambda > 0$, $S_n = \sum_{i=1}^n E_i$ *und* $X_t = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{S_n \leq t}$. *Dann ist X ein Poisson-Prozess mit Intensität* λ *bezüglich der von X erzeugten Filtration* $\mathbb{F}^X$.

Beweis. Es wird nur ein Teil des Beweises geführt, da später mit Hilfe von Martingalen allgemeinere Resultate gezeigt werden. Wir zeigen lediglich

$$\begin{aligned} P(X_t - X_s = l, X_s - X_0 = k) &= P(X_t - X_s = l)\, P(X_s - X_0 = k) \\ &= e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^l}{l!} \cdot e^{-\lambda s} \frac{(\lambda s)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Zunächst erhalten wir aus der Definition, dass

$$P\left(X_t - X_s = l, X_s = k\right) = P\left(S_k < s, S_{k+1} > s, S_{k+l} \leq t, S_{k+l+1} > t\right) \quad (8)$$

Nun verwenden wir die Darstellung von S als Summe unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen und erhalten, dass

$$\begin{aligned}
(8) &= \int_0^s \int_{s_1}^s \cdots \int_{s_{k-1}}^s \int_s^t \int_{s_{k+1}}^t \cdots \int_{s_{k+l-1}}^t \int_t^\infty \lambda^{k+l+1} e^{-\lambda s_1} e^{-\lambda(s_2-s_1)} \cdots e^{-\lambda(s_{k+l+1}-s_{k+l})} ds_{k+l+1} ds_{k+l} \cdots ds_1 \\
&= \int \cdots \int \lambda^{k+l+1} e^{-\lambda s_{k+l+1}} ds_{k+l+1} \cdots ds_1 \\
&= \int \cdots \int \lambda^{k+l} \int_t^\infty \lambda e^{-\lambda s_{k+l+1}} ds_{k+l+1} ds_{k+l} \cdots ds_1 \\
&= \int \cdots \int \lambda^{k+l} e^{-\lambda t} ds_{k+l} \cdots ds_1 \\
&= \lambda^{k+l} e^{-\lambda t} t^{k+l} \int \cdots \int t^{-k-l} ds_{k+l} \cdots ds_1 \\
&= \lambda^{k+l} e^{-\lambda t} t^{k+l} P\left(U_1 < U_2 < \cdots < U_k < s < U_{k+1} < \cdots < U_{k+l}\right)
\end{aligned}$$

mit (U_i) i.i.d. $\sim U\big([0,t]\big)$.

$$\begin{aligned}
\ldots &= \lambda^{k+l} e^{-\lambda t} t^{k+l} \binom{k+l}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t-s}{t}\right)^l \frac{1}{(k+l)!} \\
&= \frac{(\lambda s)^k e^{-\lambda s}}{k!} \frac{\left(\lambda\left(t-s\right)\right)^l e^{-\lambda(t+s)}}{l!}
\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3 (Zeittransformierter Poisson-Prozess)**.** Sei X Poisson Prozess mit $\lambda = 1$ und $\Lambda(t)$ wachsend und stetig. Zeige, dass $X_{(\Lambda(t))_{t \geq 0}}$ ein Poisson Prozess ist. (Was passiert wenn Λ nur càdlàg ist ?)

Die Brownsche Bewegung

Der Name *Brownsche Bewegung* geht auf den Botaniker Robert Brown zurück, der bereits 1825 die Pollenbewegung auf einer Wasseroberfläche beschrieb. Albert Einstein formulierte 1905 die heutige Gestalt der Brownschen Bewegung, ohne Kenntnis von früheren Arbeiten wie etwa diejenigen von Louis Bachelier, 1900. Norbert Wiener gelang es 1923 die Existenz eines solchen Prozesses nachzuweisen (worauf die Verwendung des Buchstabens W im Folgenden zurück geht).

Definition 9. Eine *Brownsche Bewegung* ist ein adaptierter, stetiger Prozess W mit

(i) $W_0 = 0$,

(ii) $E\left[W_t\right] = 0$ und $\operatorname{Var}\left(W_t\right) < \infty$, für alle $t \geq 0$,

(iii) $W_t - W_s$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s$.

Wir setzen $\Sigma^2(t) := E[W_t^2]$. Ist $\Sigma^2\left(t\right) = \sigma^2 \cdot t$, so heißt W Brownsche Bewegung mit Volatilität σ. Ist $\sigma = 1$, so heißt W *Standard Brownsche Bewegung*.

Aufgabe 4 (Zuwächse der Brownschen Bewegung)**.** Nehmen Sie an, dass die Brownsche Bewegung mit Volatilität $\sigma > 0$ stationäre Zuwächse hat und zeigen Sie, dass

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)).$$

Die Konstruktion der Brownschen Bewegung erhält man aus dem Satz von Donsker mit Hilfe von Interpolation.

Zufällige Zeiten,

Ein wichtiges Hilfsmittel für die Handhabung von stochastischen Prozessen sind geeignete zufällige Zeiten. Mit diesen kann man einen Prozess stoppen, um etwa Beschränktheit oder gar eine bestimmte Verteilung zu erzielen (Skorokhod Embedding). Wir beginnen mit den wichtigsten Regeln. Wir betrachten in diesem Abschnitt den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ mit einer (nicht notwendigerweise rechtsstetigen) Filtration $\mathbb{F}$ und setzen $\mathscr{F}_\infty = \mathscr{A}$.

Definition 10. (i) Eine messbare Abbildung $T : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ heißt *zufällige Zeit*.

(ii) Sie heißt $\mathbb{F}$-*optional*, falls $\{T < t\} \in \mathscr{F}_t$, für alle $t \geq 0$ und

(iii) $\mathbb{F}$-*Stoppzeit*, falls $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ für alle $t \geq 0$.

(iv) Ist T eine optionale Zeit, so definieren wir die T-Vergangenheit durch

$$\mathscr{F}_T := \{A \in \mathscr{A} : A \cap \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}.$$

Ist die Filtration $\mathbb{F}$ aus dem Zusammenhang klar, so lassen wir sie oft weg und schreiben kurz Stoppzeit, etc. Jede Stoppzeit ist optional, wie man durch die Darstellung

$$\{T < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{T \leq t - 1/n\} \in \mathscr{F}_t \tag{11}$$

sieht. Die σ-Algebra $\mathscr{F}_{t-}$ führen wir in Gleichung (74) ein.

Aufgabe 5 (Die T-Vergangenheit ist eine σ-Algebra)**.** $\mathscr{F}_T$ ist eine σ-Algebra für alle Stoppzeiten T.

Wir bemerken, dass konstante Zeiten natürlich Stoppzeiten sind: $T(\omega) = t \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ ist eine Stoppzeit und $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_t$.

Lemma 12 (Rechenregeln von Stoppzeiten). *Seien S, T Stoppzeiten. Dann gilt*

(i) *$S + T$ ist Stoppzeit, nicht aber $S - T$.*

(ii) *T ist $\mathscr{F}_T$-messbar.*

(iii) *Ist $S \leq T$, so folgt $\mathscr{F}_S \subseteq \mathscr{F}_T$.*

(iv) *Ist $A \in \mathscr{F}_T$, so ist*

$$T_A := \begin{cases} T(\omega) & \text{für } \omega \in A \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

ebenfalls eine Stoppzeit.

(v) *Ist die Filtration rechtsstetig, so ist T eine Stoppzeit genau dann, wenn T optional ist.*

(vi) *Ist $A \in \mathscr{F}_S$, so ist $A \cap \{S \leq T\} \in \mathscr{F}_T$ und $A \cap \{S = T\} \in \mathscr{F}_T$.*

Die Teile (ii)-(v) folgen leicht und können als Übungsaufgabe gelöst werden. Wir führen die weiteren Teile aus.

Beweis. (i) Die Aussagen über Minimum und Maximum folgen sofort. Für die erste Aussage suchen wir eine geschickte Darstellung der Menge $\{S + T \leq t\}$ und der Trick ist der Übergang zu den Stoppzeiten $S \wedge t$, $T \wedge t$. Wir setzen $\widetilde{S} := S \wedge t + \mathbb{1}_{\{S>t\}}$ und $\widetilde{T} := T \wedge t + \mathbb{1}_{\{T>t\}}$. Da $\{S \wedge t \leq s\} \in \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für $s \leq t$ und $\{S \wedge t \leq s\} = \Omega \in \mathscr{F}_t$ für $s > t$, sind diese beiden Zufallsvariabeln $\mathscr{F}_t$-messbar und somit auch $\widetilde{S} + \widetilde{T}$. Es gilt also

$$\{S + T \leq t\} = \{\widetilde{S} + \widetilde{T} \leq t\} \in \mathscr{F}_t. \square$$

Für optionale Zeiten bietet sich die Arbeit mit der rechtsstetigen Variante der Filtration an. Wir definieren

$$\mathscr{F}_t^+ := \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s, \qquad t \geq 0.$$

Ist die Filtration rechtsstetig, so ist $\mathscr{F}_t^+ = \mathscr{F}_t$. Für Stoppzeiten können wir ähnlich vorgehen: Zu einer Stoppzeit T ist die zufällige Zeit $T + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ ebenfalls wieder eine Stoppzeit. Mit dieser Beobachtung definieren wir

$$\mathscr{F}_T^+ := \bigcap_{\varepsilon>0} \mathscr{F}_{T+\varepsilon}.$$

Lemma 13 (Weitere Regeln). *(i) T ist eine $(\mathscr{F}_t)$-optionale Zeit genau dann, wenn T eine $(\mathscr{F}_t^+)$- Stoppzeit ist.*

(ii) Sind $(T_n)_{n\geq 1}$ optionale Zeiten, so sind auch $S = \inf_n T_n$ sowie $T = \sup_n T_n$ optional.

(iii) Es gilt, dass $\mathscr{F}_S^+ = \bigcap_n \mathscr{F}_{T_n}^+$.

(iv) Sind $(T_n)_{n\geq 1}$ Stoppzeiten, so ist T wieder eine Stoppzeit (nicht aber S).

Beweis. Für (i) beobachten wir, dass in einer rechtsstetigen Filtration eine optionale Zeit eine Stoppzeit ist: Da

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \{T < t + \varepsilon\},$$

ist $\{T \leq t\} \in \mathscr{F}_{t+\varepsilon}$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit liegt $\{T \leq t\}$ auch im Schnitt $\mathscr{F}_t^+$.

Für (ii) und (iv) nutzen wir (11) und, dass

$$\{S < t\} = \{\inf_n T_n < t\} = \bigcup_n \{T_n < t\}$$

sowie

$$\{T \leq t\} = \{\sup_n T_n \leq t\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\}.$$

Damit ist klar, dass für Stoppzeiten das Supremum wieder eine Stoppzeit ist. Für das Supremum von optionale Zeiten gehen wir den Umweg über Stoppzeiten: Sind (T_n) optionale Zeiten, so sind sie Stoppzeiten bezüglich $(\mathscr{F}_t^+)$, und damit ist das Supremum auch eine Stoppzeit bezüglich $(\mathscr{F}_t^+)$, also eine optionale Zeit.

Für Teil (iii) beobachten wir, dass $S \leq T_n$, also $\mathscr{F}_S^+ \subset \cap_n \mathscr{F}_{T_n}^+$ nach Lemma 12. Umgekehrt gilt für jedes $A \in \cap_n \mathscr{F}_{T_n}^+$, dass

$$A \cap \{S < t\} = A \cap \bigcup_n \{T_n < t\} = \bigcup_n \big(A \cap \{T_n < t\}\big) \in \mathscr{F}_t,$$

und wir erhalten $A \in \mathscr{F}_S^+$. $\square$

Mit diesem Lemma erweist es sich als sehr nützlich, dass jede optionale Zeit T durch optionale Zeiten mit höchstens abzählbar vielen Werten gut approximieren kann:

$$T_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{\{\frac{k-1}{2^n} \leq T < \frac{k}{2^n}\}} + \infty \mathbb{1}_{\{T=\infty\}} \tag{14}$$

so, dass $T_n \searrow T$ für $n \to \infty$.

Lemma 15. *Seien S und T zwei Stoppzeiten. Dann ist $\mathscr{F}_{S\wedge T} = \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$ und die Mengen*

$$\{S \le T\},\ \{T \le S\},\ \{S < T\},\ \{T > S\},\ \{S = T\}$$

gehören zu $\mathscr{F}_{S\wedge T}$.

Beweis. Zunächst ist $S \wedge T$ wieder eine Stoppezeit und nach Lemma 12(iii) ist $\mathscr{F}_{S\wedge T} \subseteq \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$. Für die umgekehrte Inklusion betrachen wir $A \in \mathscr{F}_t$. Dann gilt, dass

$$\begin{aligned} A \cap \{S \wedge T \le t\} &= A \cap \Big(\{\, S \le t\} \cup \{\, T \le t\}\Big) \\ &= A \cap \{S \le t\} \cup A \cap \{T \le t\} \in \mathscr{F}_t, \end{aligned}$$

und somit $A \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$.

Für den zweiten Teil erlangen wir mit Lemma 12(vi), dass $S \le T \in \mathscr{F}_T$. Außerdem ist $R = S \wedge T \le T$ wieder eine Stoppzeit. Damit ist

$$\{S < T\} = \{R < T\} \in \mathscr{F}_T.$$

Andererseits ist $\{S < T\} = \{T \le S\}^c \in \mathscr{F}_S$, ebenfalls nach Lemma 12(vi). Hiermit folgt, dass $\{S < T\} \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$. Damit folgt die Aussage auch für die Komplemente und schließlich erhalten wir gar $\{S = T\} \in \mathscr{F}_{S\wedge T}$. □

Ersteintrittszeiten

Sei X ein stochastischer Prozess und $A \in \mathscr{E}$. Dann heißt

$$T_A := \inf\{t \ge 0 : X_t \in A\}$$

Ersteintrittszeit von A.

Satz 16. *Sei X adaptiert und T_A die Ersteintrittszeit von $A \in \mathscr{E}$.*

(i) Ist (E, d) ein metrischer Raum, X stetig und A abgeschlossen, so ist T_A eine Stoppzeit.

(ii) Ist E ein topologischer Raum, X càd und A offen, so ist T_A eine optionale Zeit.

(iii) Ist $E = \mathbb{R}$, X càd mit wachsenden Pfaden und $A = [a, \infty)$, so ist T_A eine Stoppzeit.

Beweis. Um Meßbarkeit zu zeigen müssen wir uns jeweils auf Vereinigungen und Schnitte von höchstens abzählbaren viele Mengen beschränken können. Das gelingt jeweils mit einer geeigneten Darstellung. Für den ersten Teil betrachten wir stetiges X und abgeschlossenes A. Dann ist

$$\{T_A \leq t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t]} \{d(X_s, A) \leq 1/n\} \in \mathscr{F}_t.$$

Für den zweiten Teil ist X càd und A offen, und

$$\{T_A < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q} \cap [0,t)} \{X_s \in A\} \in \mathscr{F}_t.$$

Der dritte Teil folgt unmittelbar, da $\{T \leq t\} = \{X_t \geq a\} \in \mathscr{F}_t$. □

Die allgemeinere Version dieses Satzes ist ein tiefliegendes Resultat, das so genannte *Debut Theorem*. Es zeigt, dass in einer vollständigen Filtration die Eintrittszeit einer optionalen Menge eine Stoppzeit ist (siehe Theorem I.1.27 in [4] und Theorem 7.7 in [5] - zu optionalen Mengen kommen wir in Kürze).

[4] J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 2003

[5] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002. ISBN 0-387-95313-2

Messbarkeit von stochastischen Prozessen

Es gibt unterschiedliche Arten einen stochastischen Prozess zu betrachten: als Familie von Zufallsvariablen oder als eine Zufallsvariable auf dem Pfadraum. Darüber hinaus gibt aus auch noch die folgende, dritte Betrachtungsform, die sich als sehr nützlich erweisen wird. Zu dem stochastischen Prozess X assozieren wir die Abbildung

$$\widehat{X} \colon \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^d.$$

Messbarkeit kann dann bezüglich des Produktraumes $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}_{\geq 0})$ formuliert werden. Es ist aber klar, dass der Zusammenhang mit der Filtration $\mathbb{F}$ fehlt, welcher in der folgenden Definition eingeführt wird.

Definition 17. (i) X heißt *progressiv messbar*, falls für alle $t \geq 0$ die Abbildung

$$\begin{aligned} \Omega \times [0,t] &\to \mathbb{R}^d \\ (\omega, s) &\mapsto X_s(\omega) \end{aligned}$$

$\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}\big([0,t]\big)$-$\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar ist, d.h. für alle $t \geq 0$ und $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$ ist

$$X^{-1}(A) = \{(\omega, s) \colon 0 \leq s \leq t,\ \omega \in \Omega,\ X_s(\omega) \in A\} \in \mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}\big([0,t]\big)$$

(ii) Die *optionale* σ-Algebra $\mathscr{O}$ ist die σ-Algebra auf $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, die von allen adaptierten càdlàg-Prozessen erzeugt wird. X heißt *optional*, falls $\widehat{X}$ $\mathscr{O}$-messbar ist.

(iii) Die *vorhersehbare* σ-Algebra $\mathscr{P}$ ist die σ-Algebra auf $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, die von allen adaptierten càg-Prozessen erzeugt wird. X heißt *vorhersehbar*, falls $\widehat{X}$ $\mathscr{P}$-messbar ist.

Ein *zufälliges Intervall* ist in diesem Zusammenhang eine $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-messbare Menge. Wir definieren für zwei zufällige Zeiten S und T

$$[\![S, T]\!] := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0} : S(\omega) \leq t \leq T(\omega)\}.$$

Links/rechts offene Intervalle definieren wir analog. Ebenso nennen wir das Intervall optional / vorhersehbar, falls es $\mathscr{O}$ (bzw. $\mathscr{P}$)-messbar ist.

Aufgabe 6 (Charakterisierung von $\mathscr{P}$)**.** Die vorhersehbare σ-Algebra wird ebenso erzeugt von folgenden Klassen von Prozessen:

(i) Allen stetigen Prozessen,

(ii) $\mathscr{F}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und den Mengen $A \times (t, \infty)$, $A \in \mathscr{F}_t$, $t \geq 0$,

(iii) $\mathscr{F}_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und den Intervallen $]\!]T, \infty[\![$, für alle Stoppzeiten T.

Wir erhalten folgende Implikationen:

$$\text{vorhersehbar} \implies \text{optional} \implies \text{progressiv} \implies \text{adaptiert}$$

Den Beweis (optional $\Rightarrow$ adaptiert) führen wir mit Hilfe des Monotonen-Klassen Theorems. Es gibt eine Vielzahl von Monotonen-Klassen Theoremen, aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen wir das Resultat von Dynkin (Lemma 1.4 in meinem Skript). Wir erinnern, dass eine monotone Klasse ein Mengensystem ist, welches stabil unter abzählbarer Vereinigung von monoton wachsenden Mengen und unter abzählbarem Durchschnitt von monoton fallenden Mengen ist[6].

Für unsere Zwecke wird sich folgende funktionale Version als fundamental erweisen. Wir schreiben $s \wedge t := \min(s,t)$ und $s \vee t := \max(s,t)$. Wir betrachten folgende, funktionelle Version des Monotonen-Klassen Theorems.

[6] Siehe Definition 4 im dortigen Skript. Lemma 6 besagte, dass die von einem durchschnittstabilen Teil-Systems eines Dynkin Systems erzeugte Sigma-Algebra auch Teilmenge des Dynkin-Systems ist. (Dynkin-Beweistrick)

Theorem 18 (Monotone-Klassen Theorem)**.** *Sei $\mathscr{H}$ eine Menge von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, so dass*

(i) *$\mathscr{H}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum,*

(ii) *$1 \in \mathscr{H}$,*

(iii) *ist (f_n) eine Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathscr{H}$, so dass $f_n \uparrow f$ mit einer beschränkten Funktion f, so ist $f \in \mathscr{H}$.*

Ist $\mathscr{C}$ eine durchschnittstabile Menge, so dass $\mathbb{1}_C \in \mathscr{H}$ für alle $C \in \mathscr{C}$, so enthält $\mathscr{H}$ alle $\sigma(\mathscr{C})$-messbaren Funktionen.

Beweis. Wir definieren

$$\mathscr{D} = \{M \subseteq \Omega : \mathbb{1}_M \in \mathscr{H}\}.$$

Dann ist $\mathscr{D}$ ein Dynkin-System, denn mit $A \subset B$ so dass $\mathbb{1}_A \in \mathscr{H}$ und $\mathbb{1}_B \in \mathscr{H}$ ist auch $\mathbb{1}_{A \setminus B} = \mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B \in \mathscr{H}$ und ebenso für wachsende als auch fallende Folgen wegen Voraussetzung (iii).

Lemma 6 aus der Wahrscheinlichkeitstheorie liefert nun, dass $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$.

Als letzten Schritt müssen noch zeigen, dass alle $\sigma(\mathscr{C})$-messbaren Funktion in $\mathscr{H}$ liegen. Dies erfolgt beinahe klassisch in Zerlegung $f = f^+ - f^-$ und monotone Approximation von f^+ durch elementare Funktionen (diese sind Elemente von $\mathscr{H}$, da erstens $\mathbb{1}_A \in \mathscr{H}$ für $A \in \sigma(\mathscr{C})$, denn $\sigma(\mathscr{C}) \subset \mathscr{D}$ und zweitens $\mathscr{H}$ ein Vektorraum ist). □

Mit etwas mehr Aufwand kann man auch folgendes Resultat beweisen (siehe [7]):

[7] C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann: Paris, 1982; and M. Sharpe. *General theory of Markov processes*. Academic press, 1988

Theorem 19 (Monotone-Klassen Theorem). *Sei $\mathscr{H}$ eine Menge von Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, so dass*

(i) $\mathscr{H}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum,

(ii) $1 \in \mathscr{H}$,

(iii) ist (f_n) eine Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathscr{H}$, so dass $f_n \uparrow f$ mit einer beschränkten Funktion f, so ist $f \in \mathscr{H}$.

Ist $\mathscr{C}$ eine Menge von beschränkten Funktionen $\Omega \to \mathbb{R}$, die abgeschlossen unter Multiplikation ist und in $\mathscr{H}$ enthalten ist, so enthält $\mathscr{H}$ alle $\sigma(\mathscr{C})$-messbaren Funktionen.

Als Anwendung betrachten wir folgende Implikation.

Lemma 20. *Ist X optional, so ist X adaptiert.*

Beweis. Zunächst betrachten wir ein beschränktes und optionales X. Zur Anwendung des Monotone-Klassen Theorems 19 setzen wir

$$\begin{aligned} \mathscr{C} &= \{\text{alle beschränkten, adaptierten càdlàg Prozesse}\}, \\ \mathscr{H} &= \{\text{alle beschränkten, adaptierten Prozesse}\} \end{aligned}$$

Nach Definition ist $\sigma(\mathscr{C}) = \mathscr{O}$. $\mathscr{C}$ ist stabil unter Multiplikation und (i), (ii) und (iii) sind erfüllt. Es folgt mit dem Monotonen Klassen Theorem 19, dass $\mathscr{H}$ alle optionalen, beschränkten Prozesse enthält, also ist X adaptiert. Für den allgemeinen Fall betrachten wir $X^n = X\mathbb{1}_{\{|X| \leq n\}}$. Dann ist X^n optional sowie $X^n \to X$, also folgt $(X^n)_{n \geq 1}$ adaptiert, und somit X adaptiert. $\square$

Zu einem Prozess X und einer Stoppzeit T definieren wir mit $X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega)$ den Wert von X and T und durch X^T den an T gestoppten Prozess:
$$X^T := (X_{t \wedge T})_{t \geq 0}.$$

Satz 21. *Sei T eine Stoppzeit. Dann gilt*

(i) Ist X progressiv, so ist $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ $\mathscr{F}_T$*-messbar.*

(ii) Ist X progressiv, so ist X^T *progressiv.*

(iii) Ist X optional und ist $\mathbb{F}$ *rechtsstetig, so ist* X^T *optional.*

(iv) Ist X vorhersehbar, so ist X^T *vorhersehbar.*

Beweis. Für (i) nutzen wir, dass für $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$,
$$\{X_T \in B\} \cap \{ T \leq t\} = \{X_{t \wedge T} \in B\} \cap \{T \leq t\}.$$
Damit folgt (i) aus (ii).

Für (ii) fixieren wir $t \geq 0$. Zunächst ist $(\omega, s) \mapsto (\omega, s \wedge T(\omega))$ als Abbildung von $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ in sich selbst $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-messbar. Da X progressiv meßbar ist, folgt Meßbarkeit für die Komposition von meßbaren Abbildungen
$$(\omega, s) \mapsto X_{s \wedge T(\omega)}(\omega)$$
für alle $s \in [0,t]$, also ist X^T progressiv.

Für (iii) nutzen wir das Monotone-Klassen Theorem 19: Damit genügt es, lediglich solche X zu betrachten, die càdlàg sind. Wir benutzen die Approximation aus (14), so dass $T_n \searrow T$. Wir erhalten
$$\{X_{T_n} \in A\} \cap \{T_n \leq t\} = \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ \frac{k}{2^n} \leq t}} \Big(\{X_{\frac{k}{2^n}} \in A\} \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \Big).$$
Da $\frac{k}{2^n} \leq t$, ist $\{X_{\frac{k}{2^n}} \in A\} \in \mathscr{F}_t$ und $\{T_n = \frac{k}{2^n}\} \in \mathscr{F}_t$. Es folgt, dass $Y^n = X_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n < \infty\}}$ $\mathscr{F}_{T_n}$-messbar ist.

Da X rechtsstetig und $T_n \searrow T$, folgt $Y^n \to X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ P-fast sicher und somit ist $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ messbar bezüglich $\mathscr{F}_T = \mathscr{F}_T^+ = \cap_n \mathscr{F}_{T_n}$. Weiterhin ist $X_t^T = X_t \mathbb{1}_{\{T>t\}} + X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$. Hierbei ist $X_t \mathbb{1}_{\{T>t\}}$ $\mathscr{F}_t$-messbar und ebenso $X_T \mathbb{1}_{\{T \leq t\}}$. Damit ist X^T adaptiert. Da X càdlàg, ist auch X^T càdlàg. Außerdem ist X^T adaptiert, also optional. $\square$

Aufgabe 7. Etwas allgemeiner erhält man sogar folgende Aussage: Erfüllt X eine der folgenden Eigenschaften und ist T eine Stoppzeit, so auch X^T: càg, adaptiert; càd, adaptiert, vorhersehbar, optional, progressiv.

Wir schreiben $[\![T]\!] = [\![T,T]\!]$ für den *Graphen* einer Stoppzeit.

Satz 22. *Sind $S \leq T$ Stoppzeiten und ist Y $\mathscr{F}_S$-messbar, so sind*

$$Y\mathbb{1}_{[\![S,T[\![}, Y\mathbb{1}_{[\![S,T]\!]}, Y\mathbb{1}_{]\!]S,T[\![}, Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$$

optional.

Beweis. Wir beweisen nur den letzen Fall, $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$. Wir wählen $S^n = S + \frac{1}{n}$ und $T^n = T + \frac{1}{n}$ und betrachten $X^n = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[\![S^n,T^n[\![}$ mit $A \in \mathscr{F}_S$. Dann ist X^n optional (càdlàg und adaptiert), also ist $\lim_{n\to\infty} X^n = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$ optional. Mit dem Montone-Klassen Theorem 19 folgt die Aussage auch für alle Y. □

Bei diesem Satz gelten aber auch stärkere Aussagen: So ist $Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$ sogar vorhersehbar (Übungsaufgabe).

Satz 23. *(i) Jeder adaptierte càd-Prozess X ist progressiv,*

(ii) jeder adaptierte càg-Prozess X ist optional, und,

(iii) ist X càdlàg und adaptiert, so sind X_- und $\Delta X = X - X_-$ optional.

Beweis. Wir approximieren X jeweils geeigent. Für den ersten Teil fixieren wir ein $t \geq 0$ und betrachten die Approximation

$$X^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k}{2^n}} \mathbb{1}_{]\!]\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]\!]}. \tag{24}$$

Die Zufallsvariable $\widehat{X}^n : \Omega \times [0,t] \to \mathbb{R}^d$ gegeben durch $X^n(\omega,s) = X_s(\omega)$ ist $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-messbar. Die Rechtsstetigkeit liefert $X^n_s(\omega) \to X_s(\omega)$ für fast alle $(\omega,s) \in \Omega \times [0,t]$ und somit ist der Grenzwert $\widehat{X}_t$ $\mathscr{F}_t \otimes \mathscr{B}([0,t])$-messbar. Da $t \geq 0$ beliebig war, ist X progressiv.

Für den zweiten Teil approximieren wir den linksstetigen Prozess X durch

$$X^n = \sum_{k\in\mathbb{N}} X_{\frac{k-1}{2^n}} \mathbb{1}_{[\![\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}[\![}.$$

Nach Satz 22 ist X^n optional. Da X linksstetig ist, folgt $X^n_s(\omega) \to X_s(\omega)$ für alle $(\omega,s) \in \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ und somit ist auch X optional. Für den letzten Teil reicht dann zu beobachten, dass X_- linksstetig ist. □

Überlegen Sie sich als Übungsaufgabe, wie man einen Prozess noch approximieren kann (z.B. einen rechtsstetigen Prozess analog zu (24)).

Definition 25. Eine Teilmenge A von $\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ heißt *dünn*, falls $A = \bigcup_{n\geq 1} [\![T_n]\!]$ mit Stoppzeiten $(T_n)_{n\geq 1}$. Gilt $[\![T_n]\!] \cap [\![T_m]\!] = \varnothing$ für alle $n \neq m$, so heißt die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ *ausschöpfend*.

Lemma 26. *Jede dünne Menge besitzt eine ausschöpfende Folge.*

Beweis. Nach Definition ist $A = \bigcup_{n\geq 1} [\![T_n]\!]$ mit Stoppzeiten $(T_n)_{n\geq 1}$. Wir setzen

$$C_n = \bigcap_{m\geq n} \{T_m \neq T_n\}.$$

Zunächst ist $\{T_m \neq T_n\} \in \mathscr{F}_{T_n}$ nach Lemma 12 (vi). Schränken wir die Stoppzeiten (T_n) nun auf die Mengen C_n ein, indem wir die Stoppzeiten

$$S_n := (T_n)_{C_n}$$

betrachten, so ist (S_n) eine ausschöpfende Folge. □

Im Folgenden Satz zeigen wir, dass càdlàg-Prozess nicht beliebig oft springen können. Sie springen höchsten abzählbar oft, präzise: Ihre Sprünge bilden eine dünne Menge.

Satz 27. *Sei X adaptiert und càdlàg. Dann ist $\{\Delta X \neq 0\}$ dünn.*

Die Idee ist, auszunutzen, dass càdlàg Funktionen auf kompakten Intervallen nur endlich viele Sprünge mit einer Mindesthöhe von $\varepsilon > 0$ haben.

Beweis. Wir betrachten dann Sprünge von mindestens der Höhe ε und lassen $\varepsilon = 1/2m$ gegen 0 gehen. Dazu setzen wir $S_0^m = 0$ und

$$S_n^m = \inf\{t > S_{n-1}^m : |X_t - X_{S_{n-1}^m}| > \frac{1}{2^m}\}.$$

Hierbei ist $(X_t - X_{S_{n-1}^m})_{t\geq S_{n-1}^m})$ càdlàg und adaptiert, also ist S_n^m Stoppzeit nach 16. Damit ist

$$A_n^m = \{S_n^m < \infty : \Delta X_{S_n^m} \neq 0\} \in \mathscr{F}_{S_n^m},$$

denn ΔX ist optional, also progressiv und nun können wir Satz 21 (i) anwenden. Dann ist die eingeschränkte Zeit

$$T_n^m := (S_n^m)_{A_n^m}$$

wieder eine Stoppzeit. Da X linksseitige Limiten besitzt, muss $S_n^m \to \infty$ für $m, n \to \infty$. Nun ist

$$\{\Delta X \neq 0\} = \bigcup_{m,n} [\![T_n^m]\!],$$

und somit ist $\{\Delta X \neq 0\}$ dünn. □

Lokalisierung und Martingale

Ein wichtiges Konzept für die Verallgemeinerung von etablierten Begriffen wird die Lokalisierung von Klassen sein. Als Beispiel kann man zum Beispiel stetige Prozesse anführen, die man durch geeignetes Stoppen beschränken kann. Eine etwas allgemeinere Lokalisierung ist die σ-Lokalisierung, die man etwa in [8] findet.

[8] J. Kallsen. σ-localization and σ-martingales. *Theory of Probability & Its Applications*, 48(1):152–163, 2004

Definition 28. Sei $\mathscr{C}$ eine Klasse von Prozessen. Die Klasse $\mathscr{C}_{loc}$ besteht aus allen Prozessen X für die folgendes gilt: Es existiert eine wachsende Folge von Stoppzeiten $(T_n)_{n\geq 1}$ mit $T_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ P-f.s. und $X^{T_n} \in \mathscr{C}$ für alle $n \geq 1$. Die Folge $(T_n)_{n\geq 1}$ heißt *lokalisierende Folge* von X.

Beispiel 29 (Eine typische lokalisierende Folge)**.** Ist X càdlàg, so ist $T_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n\}$ eine lokalisiserende Folge von Stoppzeiten. In der Tat, nach Satz 16 ist T_n eine Stoppzeit für jedes n. Wir zeigen noch, dass $T_n \to \infty$ für $n \to \infty$, falls X càdlàg.

Dafür sind ein paar Schritte notwendig, wir lernen aber càdlàg-Funktionen näher kennen. Zunächst kann man eine Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = 1$ finden, so dass für alle $\varepsilon > 0$

$$\sup_{s,t\in[t_{n-1},t_n)} |f(t) - f(s)| \leq \varepsilon, \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Das haben wir bereits in Satz 27 gezeigt. Wir verwenden das Argument noch einmal für ein festes $\omega \in \Omega$: Sei t^* das Supremum derjenigen $t \in [0, 1]$, für die $[0, t)$ so zerlegt werden kann, das die obigen Gleichung gilt. Da $f(0) = f(0+)$, ist $t^* > 0$. Außerdem existiert $f(t^*-)$ und somit kann $[0, t^*)$ selbst zerlegt werden. Wäre $t^* < 1$, so argumentiert man wie mit dem Punkt 0: $f(t^*) = f(t^*+)$, also kann t^* in diesem Fall nicht das supremum sein.

Große Sprünge können demnach nur an den Zeitpunkten (t_n) passieren und man erhält hieraus, dass eine cádlág-Funktion höchstens endlich viele Sprünge größer einem beliebigen $\varepsilon > 0$ hat. Außerdem folgt, dass

$$\sup_{0\leq t\leq T} |f(t)| \leq \sum_{n=1}^{N} |\Delta f(t_n)| + N\varepsilon < \infty.$$

Würde nun $T_n \to T < \infty$ konvergieren, so wäre das Supremum auf dem Intervall $[0, T]$ unendlich, ein Widerspruch.

Eine Klasse $\mathscr{C}$ heißt stabil unter Stoppen, falls aus $X \in \mathscr{C}$ folgt, dass $X^T \in \mathscr{C}$ für alle Stoppzeiten T.

Satz 30. *Die Filtration $\mathbb{F}$ sei rechtsstetig. Seien $\mathscr{C}$ und $\mathscr{C}'$ zwei Klassen welche stabil sind unter Stoppen. Dann folgt:*

(i) $\mathscr{C}_{loc}$ *ist stabil unter Stoppen und* $(\mathscr{C}_{loc})_{loc} = \mathscr{C}_{loc}$.

(ii) $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{loc} = \mathscr{C}_{loc} \cap \mathscr{C}'_{loc}$.

Beweis. $\mathscr{C}_{loc}$ ist stabil unter Stoppen wenn $\mathscr{C}$ stabil ist unter Stoppen, da $(X^{T_n})^T = X^{T_n \wedge T} = (X^T)^{T_n}$. Für den zweiten Teil von (i) sei $X \in (\mathscr{C}_{loc})_{loc}$. Dann existieren Stoppzeiten $(T_n)_{n \geq 1}$ so, dass $X^{T_n} \in \mathscr{C}_{loc}$ für alle $n \geq 1$. Hieraus folgt nun, dass für jedes n eine wachsende Folge von Stoppzeiten $(T(n,m))_{m \geq 1}$ existiert und $(X^{T_n})^{T(n,m)} \in \mathscr{C}$ für alle $n, m \geq 1$.

Dann existiert ein Index $p_n \in \mathbb{N}$ so, dass

$$P(T(n, p_n) < T_n \wedge n) \leq \frac{1}{2^n}.$$

Wir setzen $S_n = T_n \wedge (\inf_{m \geq n} T(m, p_m))$. Da die Filtration rechtsstetig ist, ist S_n Stoppzeit nach Lemma 13. Außerdem ist (T_n) wachsend und somit auch (S_n). Weiterhin gilt, dass

$$\begin{aligned} P(S_n < T_n \wedge n) &\leq \sum_{m \geq n} P(T(m, p_m)) < T_n \wedge n) \\ &\leq \sum_{m \geq n} P(T(m, p_m)) < T_m \wedge m) \leq \sum_{m \geq n} \frac{1}{2^m} = 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Da $T_n \to \infty$, folgt $S_n \to \infty$ (f.s.). Damit gilt für alle $n \geq 1$, dass

$$X^{S_n} = \big((X^{T_n})^{T(n,p_n)}\big)^{S_n} \in \mathscr{C}.$$

Für Teil (ii) beobachten wir, dass trivialerweise $(\mathscr{C} \cap \mathscr{C}')_{loc} \subseteq \mathscr{C}_{loc} \cap \mathscr{C}'_{loc}$. Ist umkehrt $X^{T_n} \in \mathscr{C}$ und $X^{T'_n} \in \mathscr{C}'$ für zwei lokalisierende Folgen (T_n) und (T'_n), so ist $(X^{T_n})^{T'_n} \in \mathscr{C}'$ und $(X^{T'_n})^{T_n} \in \mathscr{C}$. Damit ist $S_n = T_n \wedge T'_n$ lokalisierende Folge und $X^{S_n} \in \mathscr{C} \cap \mathscr{C}'$. $\square$

Wir kommen zu dem äußerst wichtigen Begriff eines Martingals. Hierbei setzen wir nicht, wie oft in der Literatur gemacht, die üblichen Bedingungen für $\mathbb{F}$ voraus.

Definition 31. Ein *(Sub-/Super-)Martingal* X ist ein adaptierter Prozess, dessen Pfade P-f.s. *càdlàg* sind und

(i) $E[|X_t|] < \infty$ für alle $t \geq 0$

(ii) $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] = X_s$ für alle $0 \leq s \leq t$;

(für Submartingal $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] \geq X_s$, und für ein Supermartingal $E[X_t \mid \mathscr{F}_s] \leq X_s$).

Definition 32. Gibt es Y mit $E[|Y|] < \infty$, so dass

$$E[Y|\mathscr{F}_s] = X_s, \quad s \geq 0$$

gilt, so sagen wir Y *schließt das Martingal X ab* und nennen auch $(X_t)_{0 \leq t \leq \infty}$ mit $X_\infty = Y$ ein Martignal (analog für Sub-/Supermartingal).

Wir sagen, X hat einen *terminalen Wert* X_∞, falls eine Zufallsvariable X_∞ existiert mit $X_\infty = \lim_{t \to \infty} X_t$ P-fast-sicher.

Natürlich muss Y nicht eindeutig sein, der terminale Wert ist aber eindeutig. In beiden Fällen ist X_T für jede zufällige Zeit X_T wohldefiniert, indem wir $X_T = X_\infty$ auf $\{T = \infty\}$ setzen.

Aufgabe 8 (Martingale unter konvexen Transformationen)**.** Sei X ein Martingal (Submartingal) und $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (konvex und nicht fallend), so dass $E[|\varphi(X_t)|] \leq \infty$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $\varphi(X)$ ein Submartingal.

Das Optional Sampling Theorem

Das folgende Resultat verallgemeinert das Optional Stopping Theorem, welches wir bereits aus der Wahrscheinlichkeitstheorie kennen. Intuitiv gesehen bedeutet es, dass man die Martingal (bzw. Super-/Sub-) Eigenschaft auch durch noch so geschicktes Stoppen nicht brechen kann. Wenn man ein Martingal als ein faires Spiel auffasst, heißt dass, das man (sagen wir etwa in endlicher Zeit oder für gleichgradig integrierbare Martingale, um präzise zu sein) dieses Spiel nicht durch geschicktes Stoppen austricksen kann.

Satz 33 (Optional Sampling Theorem)**.** *Sei X ein rechtsstetiges Submartingal, so dass X_∞ existiert und das Submartingal abschließt. Sind S und T optionale Zeiten, dann folgt, dass X_S und X_T integrierbar sind und*

$$X_S \leq E[X_T \mid \mathscr{F}_S^+] \quad \text{auf } S \leq T\,. \tag{34}$$

Für ein Supermartingal gilt die Aussage analog mit $\geq$.

Eine Frage, die sich hierbei stellt, ist, ob man das Sub-/Supermartingal abschließen kann. Wir werden später noch sehen, dass gleichgradige Integrierbarkeit hierzu äquivalent ist, siehe auch Theorem 9.30 in Kallenberg (3. Edition)[9].

[9] O. Kallenberg. *Foundations of modern probability (3rd Edition)*. Springer, 2021

Wir werden zunächst Resultate in diskreter Zeit beweisen und diese Resultate dann auf stetige Zeit übertragen. Hierzu betrachten wir einfach die diskrete Filtration $(\mathscr{F}_n)_{n\geq 1}$, ohne dies besonders zu erwähnen.

Bemerkung 35. Ist die Filtration $\mathbb{F}$ rechtsstetig, so gilt das Resultat offensichtlich für eine Stoppzeit S und auch dann, wenn man in (34) $\mathscr{F}_S^+$ durch $\mathscr{F}_S$ ersetzt.

Satz 36 (Optional Sampling Theorem in diskreter Zeit)**.** *Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ ein Submartingal (oder Martingal, bzw. Supermartingal) und S und T beschränkte Stoppzeiten, dann folgt, dass X_S und X_T integrierbar sind und*

$$X_S \leq E[X_T \mid \mathscr{F}_S] \quad \text{auf } S \leq T\,. \tag{37}$$

Im Martingalfall erhalten wir Gleichheit und im Supermartingalfall $\geq$.

Beweis. Integrierbarkeit ist klar. Wir betrachten den Submartingal-Fall, die anderen laufen analog. Sei $T \leq m$ P-fast sicher. Die Idee ist, Mengen der Form

$$F_j := F \cap \{S = j\}, \quad j = 0, \dots, m$$

zu betrachten. Dann ist für $F \in \mathscr{F}_S$ und alle $k \geq j$

$$F_j \cap \{T > k\} \in \mathscr{F}_k.$$

Da X ein Submartingal ist, folgt

$$\int_{F_j \cap \{T>k\}} X_k dP \leq \int_{F_j \cap \{T>k\}} X_{k+1} dP.$$

Wir interessieren uns für $T \geq k$ und erhalten damit, dass

$$\int_{F_j \cap \{T \geq k\}} X_k dP = \int_{F_j \cap \{T=k\}} X_k dP + \int_{F_j \cap \{T>k\}} X_k dP.$$

Wir beachten, dass $X_k = X_T$ auf $\{T = k\}$ und stellen um:

$$\int_{F_j \cap \{T \geq k\}} X_k dP - \int_{F_j \cap \{T \geq k+1\}} X_{k+1} dP \leq \int_{F_j \cap \{T=k\}} X_T dP.$$

Summieren wir über $k = j, \dots, m$ so ist die linke Seite eine Teleskop-Summe, so dass nur der erste und letze Eintrag übrig bleiben. Das ergibt

$$\int_{F_j \cap \{T \geq j\}} X_j dP - \int_{F_j \cap \{T \geq m+1\}} X_{m+1} dP \leq \int_{F_j \cap \{j \leq T \leq m\}} X_T dP. \tag{38}$$

Nun ist $\{F_j \cap \{T \geq j\}\} = F_j$, $\{T \geq m+1\} = \varnothing$ und $\{F_j \cap \{j \leq T \leq m\}\} = F_j$. Weiterhin ist $X_j = X_S$ auf F_j. Hieraus erhalten wir

$$\int_{F_j} X_S dP \leq \int_{F_j} X_T dP$$

und Summierung über j ergibt das Resultat. □

Für unbeschränkte Stoppzeiten müssen wir das (Super-/Sub-) martingal abschließen können. Wir fügen dazu den Wert X_∞ hinzu, ebenso mit $\mathscr{F}_\infty = \cup_{n \geq 1} \mathscr{F}_n$. (Das geht z.B. immer für ein nicht-negatives Supermartingal, indem wir mit Null abschließen).

Satz 39. *Sei $(X_n)_{1 \leq n \leq \infty}$ ein Submartingal und S und T Stoppzeiten, dann folgt, dass X_S und X_T integrierbar sind und*

$$X_S \leq E[X_T \mid \mathscr{F}_S] \quad \textit{auf } S \leq T. \tag{40}$$

Das Optional Sampling Theorem in diskreter Zeit mit unbeschränkten Stoppzeiten. Für ein Supermartingal haben wir in (40) natürlich $X_S \leq E[X_T \mid \mathscr{F}_S]$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $X_n \geq 0$ für alle n und $X_\infty = 0$ f.s. Wir kehren zurück zur Ungleichung (38). Dort beobachten wir, dass wegen $X_{m+1} \geq 0$ folgt, dass

$$\int_{F_j} X_S dP \geq \int_{F_j \cap \{T \leq m\}} X_T dP.$$

Da die Integranden nicht-negativ sind, existieren diese Integrale immer und wir summieren über j und betrachten $m \to \infty$, woraus folgt, dass

$$\int_{F \cap \{S < \infty\}} X_S dP \geq \int_{F \cap \{T < \infty\}} X_T dP.$$

Wegen $X_\infty = 0$ erhalten wir trivialerweise, dass

$$\int_{F\cap\{S=\infty\}} X_S dP = \int_{F\cap\{T=\infty\}} X_T dP$$

und das Resultat folgt, nachdem wir gezeigt haben, dass die Integrale endlich sind. Hierfür nutzen wir $X_S \leq \liminf X_{S\wedge n}$ wegen $X_n \geq 0 = X_\infty$, so dass mit Fatou

$$E[X_S] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_{S\wedge n}].$$

Nun sind aber 1 und $S \wedge n$ beschränkte Stoppzeiten und aus Satz 36 folgt $E[X_{S\wedge n}] \leq E[X_1] < \infty$.

Für dem allgemeinen Fall betrachten wir

$$X'_n := E[X_\infty|\mathscr{F}_n], \qquad X''_n = X_n - X'_n, \qquad n \geq 1.$$

Dann ist $(X'_n)_{1\leq n\leq\infty}$ ein Martingal und $X_n \geq X'_n$ aufgrund der Supermartingal-Eigenschaft von X. Damit ist X'' ein positives Supermartingal mit $X''_\infty = 0$ und wir können den vorherigen Teil anwenden, und die Behauptung folgt für Supermartingale. □

Nun können wir Satz 33 beweisen.

Beweis. Wir approximiern $S_n \searrow S$ und $T_n \searrow T$ nach (14). Dann ist $S_n \leq T_n$. Wir können also Satz 39 anwenden, so dass

$$\int_F X_{S_n} dP \geq \int_F X_{T_n} dP.$$

für alle $F \in \mathscr{F}_{S_n}$, also für alle $F \in \mathscr{F}_S^+ = \cap_{n\geq 1}\mathscr{F}_{S_n}$.

Rechtstetigkeit liefert nun, dass $X_T = \lim_{n\to\infty} X_{T_n}$ f.s., und ebenso für X_S. Integrierbarkeit von X_S und X_T zeigt man ebenso wie in Satz 39. Damit folgt die Behauptung für Submartingale. Für Supermartingale erhält man die Aussage durch Übergang zu $-X$. □

Eine intensivere Behandlung zu optimalem Stoppen findet man auch in Abschnitt 1.5.2. in [10]
oder in Kapitel 6 [11] (oder in der Vorlesung *diskrete Finanzmathematik*).

[10] E. Eberlein and J. Kallsen. *Mathematical Finance*. Springer, 2019

[11] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2011

Exkurs 41 (Optimales Stoppen)**.** Mit der Technik des Stoppens können wir uns erste Ergebnisse zur Optimalen Steuerung/Kontrolle erschließen. Ziel ist es den optimalen erwarteten Gewinn an Stoppzeiten T, definiert durch $E[X_T]$, zu maximieren. Die dynamische Wertfunktion ist die *Snellsche Einhüllende*

$$V_t := \operatorname{esssup}\{E[X_T|\mathscr{F}_t] : T \text{ Stoppzeit}, t \leq T \leq T^*\}, \tag{42}$$

mit einem Zeithorizont T^*.

Dazu gibt es folgende, allgemeine Aussage: Ist T eine Stoppzeit mit Werten in $\{0, \ldots, T^*\}$ und V ein adaptierter Prozess, so dass V^T ein Martingal ist, $V_T = X_T$, $V_0 = M_0$ für ein Supermartingal $M \geq X$, so ist T optimal. Außerdem stimmt dann V bis T mit der Snellschen Einhüllenden überein.

Als Beispiel gibt es das berühmte Heirats/Parkplatz-problem (Bsp 1.58 in Eberlein/Kallsen.)

Uppcrossing- und Maximal-Ungleichung

Eine zentrale Ungleichung ist die Upcrossing-Ungleichung von Doob, welche wir in diskreter Zeit bereits kennen. Wir zeigen wie man sie und andere Ungleichungen (Doobs Maximalungleichung) von diskreter Zeit auf stetige Zeit unter Rechtsstetigkeit verallgemeinern kann.

Wir führen dazu zunächst die Upcrossings ein. Sei $\alpha < \beta$ reell und $F \subset [0, \infty)$ endlich und

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \min\{t \in F \mid X_t \leq \alpha\} \\
\sigma_1 &= \min\{t \in F,\ t > \tau_1 \mid X_t \geq \beta\} \\
\tau_i &= \min\{t \in F,\ t > \sigma_{i-1} \mid X_t \leq \alpha\} \\
\sigma_i &= \min\{t \in F,\ t > \tau_j \mid X_t \geq \beta\}
\end{aligned} \tag{43}$$

wobei $\min \phi = \infty$.

Sei $U_F(\alpha, \beta, X(\omega))$ die größte Zahl i, so dass $\sigma_i < \infty$, die Anzahl der *Upcrossings* von X in F. Ist $I \subset [0, \infty)$ so setzen wir

$$U_I(\alpha, \beta, X(\omega)) = \sup\{U_F(\alpha, \beta, X(\omega)) \mid F \subseteq I,\ F \text{ endlich}\}$$

Theorem 44. *Sei X ein* càdlàg*-Submartingal,* $0 \leq a < b < \infty$ *und* $\alpha < \beta$, $\lambda > 0$ *dann folgt*

(i) *Die erste Submartingal-Ungleichung:*

$$\lambda \cdot P(\sup_{[a,b]} X \geq \lambda) \leq E[X_b^+].$$

(ii) *Die zweite Submartingal-Ungleichung:*

$$\lambda \cdot P(\inf_{[a,b]} X \leq -\lambda) \leq E[X_b^+] - E[X_a]$$

(iii) *Die Upcrossing- und Downcrossing-Ungleichungen:*

$$E[U_{[a,b]}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{E[X_b^+] + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$
$$E[D_{[a,b]}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{E[(X_b - \alpha)^+]}{\beta - \alpha}.$$

(iv) *Doob's Maximal-Ungleichung: Ist* $X \geq 0$ *und* $p > 1$*, so gilt*

$$E[(\sup_{[a,b]} X)^p] \leq (\frac{p}{p-1})^p E[X_b^p].$$

(v) *Fast jeder Pfad von X ist beschränkt auf kompakten Intervallen.*

Wir beginnen mit einem Beweis in diskreter Zeit. Die folgende Ungleichung wurde bereits in der Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie bewiesen.

Lemma 45 (Diskrete Submartingal-Ungleichung von Doob)**.** *Sei* $(X_n)_{n \geq 1}$ *ein Submartingal und* $X_n^* := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$*. Dann gilt für jedes* $\lambda > 0$*, dass*

$$\lambda \cdot P(X_n^* > \lambda) \leq \int_{\{X_n^* > \lambda\}} X_n dP \leq E[X_n^+], \tag{46}$$
$$\lambda \cdot P(\min_{1 \leq i \leq n} X_i < -\lambda) \leq E[X_n^+] - E[X_1]. \tag{47}$$

Beweis. Wir rechnen nach:

$$\lambda \cdot P(X_n^* > \lambda) = \int_{\{X_n^* > \lambda\}} \lambda dP.$$

Nun möchten wir nicht von λ zu X^* übergehen, sondern am liebsten zu einem geeigneten X_k. Das kann nur mit Stoppen gelingen. Wir definieren also $T = \inf\{i \geq 0 : X_i > \lambda\} \wedge (n+1)$. Dann ist $\{X_n^* > \lambda\} = \{T \leq n\}$.

Wir erinnern, dass die Submartingal Eigenschaft auch für Stoppzeiten gilt. Ist also $S \geq T$, so folgt $X_T \leq E[X_S|\mathscr{F}_T]$ und insbesondere

$$\int_F X_T dP \leq \int_F X_S dP$$

für alle $F \in \mathscr{F}_T$. Wir wenden dies für $S = n$ und $F = \{T \leq n\} \in \mathscr{F}_T$ an. Es gilt, dass

$$\int_{\{X_n^* > \lambda\}} \lambda dP < \int_{\{X_n^* > \lambda\}} X_T dP \leq \int_{\{X_n^* > \lambda\}} X_n dP \leq \int_{\{X_n^* > \lambda\}} X_n^+ dP.$$

Für den zweiten Teil gehen wir einigermaßen analog vor. Wir setzen $S = \inf\{i \geq 0 : X_i < -\lambda\})$ mit der Konvention $\inf \emptyset = n+1$. Dann ist [12]

$$\begin{aligned} E[X_1] \leq E[X_{S \wedge n}] &= \int_{\{S \leq n\}} X_S dP + \int_{\{S = n+1\}} X_n dP \\ &\leq -\lambda P(\{S \leq n\}) + \int_{\{S=n+1\}} X_n dP \\ &\leq -\lambda P(\{S \leq n\}) + E[X_n^+]. \end{aligned}$$

Nun ist $\{S \leq n\} = \{\min_{1 \leq i \leq n} X_i < -\lambda\}$ und der zweite Teil folgt. □

[12] Wir nutzen $\int_A X_n dP = \int_A X_n^+ dP - \int_A X_n^- dP \leq E[X_n^+]$, für alle $A \in \mathscr{A}$ und eine integrierbare ZV X.

Die zentrale Ungleichung für die Regularität von Submartingalen ist die folgende, wichtige Ungleichung. Sie beschränkt die Anzahl der Überschreitungen von unten des Intervalls $[\alpha, \beta]$ und ist ein wesentlicher Bestandteil von Martingalkonvergenzsätzen, wovon wir den Doobschen Martingalkonvergenzsatz in Kürze kennenlernen.

Lemma 48 (Diskrete Upcrossing-Ungleichung). *Sei $(X_n)_{n \geq 1}$ ein Submartingal. Dann gilt für die Upcrossings von $\alpha < \beta$*

$$E[U_{N_n}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{E[X_n^+] + |\alpha|}{\beta - \alpha},$$

wobei $N_n = \{1, \ldots, n\}$.

Beweis. Wir nehmen zunächst an, dass $X \geq 0$ und $\alpha = 0$. Mit den Stoppzeiten aus Gleichung (43) setzen wir $T_0 = 1$, $T_1 = \tau_1 \wedge n$ und $T_2 = \sigma_1 \wedge n$, $T_3 = \tau_2 \wedge n$, $T_4 = \sigma_2 \wedge n, \ldots, T_n = n$. Wir können die Differenz $X_n - X_1$ nun als Summe über alle Downcrossings plus alle

Upcrossings darstellen, denn

$$X_n - X_1 = X_{T_n} - X_{T_0} = \sum_{j=0}^{n-1} (X_{T_{j+1}} - X_{T_j})$$
$$= \sum_{j \text{ gerade}} (\text{ downcrossings }) + \sum_{j \text{ ungerade}} (\text{ upcrossings }).$$

Wir erinnern, dass σ_k das Ende eines Upcrossings bedeutet und unterscheiden drei Fälle.

Ist $\sigma_k < n$, so folgt

$$X_{\sigma_k} \geq \beta > 0 = X_{\tau_k}, \tag{49}$$

also $X_{\sigma_k} - X_{\tau_k} \geq \beta$. Dies passiert genau $U_{N_n}(\alpha, \beta, X)$ mal.

Ist $\sigma_k = n$ zum ersten Mal, so folgt

$$X_{\sigma_k} = X_n \geq 0 = X_{\tau_{k-1}}.$$

In allen anderen Fällen folgt,

$$X_{\sigma_k} = X_n = X_{\tau_k}.$$

In den beiden letzten Fällen erhalten wir also $X_{\sigma_k} - X_{\tau_k} \geq 0$. Zusammen mit (49) erhalten wir, dass

$$\sum_{j \text{ ungerade}} (X_{T_{j+1}} - X_{T_j}) \geq \beta \cdot U_{N_n}(\alpha, \beta, X) \tag{50}$$

Für die Downcrossing nutzen wir die Submartingaleigenschaft unter Stoppen: Da $T_j \leq T_{j+1}$ und X ein Submartingal, gilt

$$E[X_{T_{j+1}} - X_{T_j}] \geq 0. \tag{51}$$

Aus (50) und (51) erhalten wir nun, dass

$$E[X_n] \geq E[X_n - X_1] \geq \beta \cdot E[U_{N_n}(\alpha, \beta, X)]. \tag{52}$$

Für den allgemeinen Fall betrachten wir $X'_n = (X_n - \alpha)^+$ mit $n \geq 1$. Dann ist $U_{N_n}(\alpha, \beta, X) = U_{N_n}(0, \beta - \alpha, X')$ und Gleichung (52) ergibt

$$E[U_{N_n}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{E[(X_n - \alpha)^+]}{\beta - \alpha} \leq \frac{E[X_n^+] + |\alpha|}{\beta - \alpha}. \square$$

Lemma 53 (Diskrete Doobsche Maximal-Ungleichung)**.** *Sei $p > 1$, $(X_n)_{n \geq 1}$ ein nicht-negatives Submartingal und $E[X_n^p] < \infty$. Dann ist*

$$E[(X_n^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[X_n^p]. \tag{54}$$

Beweis. Wir nutzen die erste Submartingal-Ungleichung. Zu Beginn setzen wir $Y := X_n^* = \sup_{\{1,\ldots,n\}} X_i$, $F(y) = P(Y \leq y)$, und $G(y) = 1 - F(y)$. Es folgt mit (46), dass

$$G(y) = P(X_n^* > y) \leq \frac{1}{y} \int_{\{X_n^* > y\}} X_n dP.$$

Nun berechnen wir das p-te Moment von X_n^*,

$$\begin{aligned}
E[(X_n^*)^p] &= \int_0^\infty y^p \, dF(y) = -\int_0^\infty y^p \, dG(y) \\
&= \int_0^\infty p y^{p-1} G(y) dy - \big(y^p G(y)\big)\Big|_{y=0}^\infty \\
&\leq \int_0^\infty p y^{p-1} G(y) dy,
\end{aligned}$$

da $yG(y) \geq 0$. Nun setzen wir die obige Abschätzung für G ein und erhalten mit dem Satz von Fubini, dass

$$\begin{aligned}
E[(X_n^*)^p] &\leq \int_0^\infty p y^{p-2} \int_{\{X_n^* > y\}} X_n dP \, dy \\
&= \int \int_{\{0 \leq y < X_n^*\}} p y^{p-2} dy \, X_n dP \\
&= \frac{p}{p-1} E[(X_n^*)^{p-1} X_n] \\
&\leq \frac{p}{p-1} \|(X_n^*)^{p-1}\|_q \|X_n\|_p = \frac{p}{p-1} E[(X_n^*)^{(p-1)q}]^{1/q} \cdot E[X_n^p]^{1/p}
\end{aligned}$$

nach der Hölderschen Ungleichung mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, also $q = \frac{p}{p-1}$ und somit $(p-1)q = \frac{(p-1)p}{p-1} = p$. Bringt man alle Ausdrücke mit X_n^* auf eine Seite, so erhält man

$$\frac{p}{p-1} E[X_n^p]^{1/p} \geq E[(X_n^*)^p]^{1 - \frac{p-1}{p}}.$$

Da $1 - {}^{p-1}/_{p} = p^{-1}$ folgt hieraus (54). □

Lemma 55 (Submartingal-Ungleichungen von Doob)**.** *Sei X ein* càdlàg-*Submartingal. Dann gelten (i) - (iv) von Theorem 44.*

Beweis. Wir betrachten exemplarisch Teil (i). Wir wählen eine endliche Menge welche aus a, b und Punkten aus $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ besteht und $\mu > 0$. Aus Lemma 45 folgt, dass $\mu \cdot P(\max_{t \in F} X_t > \mu) \leq E[X_b^+]$. Wir betrachten eine wachsende Folge von solchen endlichen Mengen, dessen Vereinigung $\{a, b\} \cup [a, b] \cap \mathbb{Q}$ ist. Mit Monotoner Konvergenz können wir F in obiger Ungleichung durch diese Vereinigung ersetzen. Rechtsstetigkeit der Pfade impliziert nun

$$\mu \cdot P(\max_{t \in [a,b]} X_t > \mu) \leq E[X_b^+].$$

Für die stärkere Aussage mit $\geq$ lassen wir $\mu \nearrow \lambda$ gehen, und somit folgt die Behauptung. $\square$

Der Doobsche Grenzwertsatz

Beispiel 56 (Symmetrische Irrfahrt)**.** Sei X_i i.i.d. mit $X_i \in \{-1, 1\}$ und $P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{konvergiert}$$
$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{konvergiert}$$
$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n \quad \text{divergiert}$$

nach dem starken Gesetz der großen Zahl und dem zentralen Grenzwertsatz. Es ist also klar, dass für Martingale Zusatzbedingungen benötigt werden, um Konvergenz zu erhalten.

Satz 57 (Doobscher Grenzwertsatz)**.** *Sei X ein Submartingal, so dass $\sup_{t\geq 0} E[X_t^+] < \infty$. Dann existiert $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$, P-fast-sicher und $E[|X_\infty|] < \infty$.*

Beweis. Wir setzen $C := \sup_{t\geq 0} E[X_t^+]$. Zunächst ist für alle $n \geq 1$ und $\alpha < \beta$

$$E[U_{[0,n]}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{E[X_n^+] + |\alpha|}{\beta - \alpha}.$$

Wegen monotoner Konvergenz erhalten wir, dass

$$E[U_{[0,\infty]}(\alpha, \beta, X)] \leq \frac{C + |\alpha|}{\beta - \alpha}.$$

Wir wählen die Ereignisse

$$A_{\alpha,\beta} := \{\omega \in \Omega : U_{[0,\infty]}(\alpha, \beta, X) = \infty\}, \quad A := \bigcup_{\substack{\alpha<\beta \\ \alpha,\beta\in\mathbb{Q}}} A_{\alpha,\beta}.$$

Da $E[U_{[0,\infty]}(\alpha, \beta, X)] < \infty$ hat $A_{\alpha,\beta}$ die Wahrscheinlichkeit 0 und somit auch A. Allerdings ist $\{\liminf X < \limsup X\} \subseteq A$, woraus folgt, dass $X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ P-f.s. existiert. Schließlich zeigen wir noch die Integrierbarkeit von X_∞: Zunächst ist für alle $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E[|X_t|] &= E[X^+] + E[X^-] = 2E[X^+] - (-E[X^-] + E[X^+]) \\ &= 2E[X_t^+] - E[X_t] \leq 2C - E[X_0] < \infty, \end{aligned}$$

so dass aus $\sup_{t\geq 0} E[X_t^+] < \infty$ folgt, dass $\sup_{t\geq 0} E[|X_t|] < \infty$. Mit dem Lemma von Fatou folgt hieraus, dass $E[|X_\infty|] < \infty$. □

Beispiel 58 (Geometrische Brownsche Bewegung ist nicht gleichgradig integrierbar)**.** Das Black-Scholes-Modell basiert auf einer geometrischen Brownschen Bewegung. Basis hierfür ist das Martingal

$$M_t = \exp\big(B_t - \frac{t}{2}\big), \quad t \geq 0$$

und B Brownsche Bewegung nach Definition 9. Natürlich ist $E[M_t^+] = E[M_t] = 1$, also existiert M_∞. Für alle $\varepsilon > 0$ ist

$$\begin{aligned} P(M_t > \varepsilon) &= P(B_t > \ln\varepsilon + {}^t/_2) \\ &= 1 - \Phi\Big(\frac{\ln\varepsilon + {}^t/_2}{\sqrt{t}}\Big) \to 0, \end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Man erhält $M_t \to 0$ P-f.s., d.h. $E[M_t] \neq E[M_\infty]$, $(M_t)_{t\in[0,\infty]}$ ist also ein echtes Supermartingal.

Eine Bedingung, die garantieren wird, dass ein Martingal abschließbar ist, wird die folgende sein.

Definition 59. Eine Familie $(X_i)_{i\in I}$ von Zufallsvariablen heißt *gleichgradig integrierbar*, falls

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \int_{\{|X_i|>a\}} |X_i| dP = 0.$$

Satz 60. *Angenommen $X_n \to X$ fast sicher, dann*

(i) Sind $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar, so gilt

$$E[X_n] \to E[X] \tag{61}$$

(ii) Sind umgekehrt $X_n \geq 0$ und $X \geq 0$, so folgt aus (61), dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar ist.

(Siehe Theorem 4.40 Vorlesung Wtheorie).

Definition 62. (i) Ein Martingal X heißt gleichgradig integrierbar, falls $(X_t)_{t\geq 0}$ *gleichgradig integrierbar* ist. Wir bezeichnen mit $\mathscr{M}$ die Klasse aller gleichgradig integrierbaren Martingale.

(ii) Ein Martingal X heißt *quadratintegrierbar*, falls $\sup_{t\geq 0} E[X_t^2] < \infty$. Wir bezeichnen diese Klasse mit $\mathscr{H}^2$.

(iii) Ein Prozess aus $\mathscr{M}_{loc}$ heißt *lokales Martingal* und ein Prozess aus $\mathscr{H}^2_{loc}$ heißt *lokal quadratintegrierbar*.

Ein Großteil der lokalen Martingale erfüllt die Integrabilitätsbedingung nicht, aber durch geschicktes Stoppen kann man dies erzwingen. Es gibt aber sogar sehr gut integrierbare lokale Martingale, die keine echten Martingale sind.

Beispiel 63 (Ein echtes lokales Martingal)**.** Zunächst einmal kann man für eine 2-dimensionale Brownsche Bewegung B zeigen, dass $X = \log |B|$ ein lokales Martingal ist. Außerdem gilt, dass $E[|X_t|^p] < \infty$, aber $\lim_{t\to\infty} E[X_t] = \infty$, so dass X kein Martingal sein kann.

Definition 64. Ein Prozess X heißt *von Klasse* (D) falls die Familie

$$\{X_T : T \text{ endliche Stoppzeit }\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

Satz 65. *(i) Ein Martingal ist ein lokales Martingal.*

(ii) Ein gleichgradig integrierbares Martingal ist von Klasse (D).

(iii) Ein lokales Martingal ist gleichgradig integrierbar genau dann, wenn es von Klasse (D) ist.

Beweis: Übungsaufgabe.

Definition 66. Wir bezeichnen mit $\mathscr{S}$ (beziehungsweise $\mathscr{S}_a$) die Klasse der Stoppzeiten für die $P(T < \infty) = 1$ (beziehungsweise $P(T \leq a) = 1$) ist. Ein Prozess X heißt von Klasse (DL), falls für alle $a > 0$

$$\{X_T : T \in \mathscr{S}_a\}$$

gleichgradig integrierbar ist.

Die Doob-Meyer Zerlegung

Damit sind wir in der Lage die berühmte und zentrale Zerlegung von Sub (Super-)martingalen in ein Martingal plus einen wachsenden (fallenden) Prozess zu beweisen.

Satz 67 (Doob-Meyer Zerlegung)**.** *Sei X ein Submartingal der Klasse* (DL)*, dann existiert ein Martingal M und ein vorhersehbarer, wachsender Prozess* A *so dass*

$$X = M + A.$$

Für die Eindeutigkeit greifen wir vor: A ist eindeutig unter allen Prozessen für die

$$E[M' \cdot A_t] = E[M'_- \cdot A_t]$$

für alle beschränkten Martingale M'. Das hierbei verwendete Integral $M \cdot A$ werden wir noch genau kennen lernen. Für den Beweis dieses tiefliegenden Resultates verweisen wir auf Karatzas/Shreve[13], Theorem 1.4.10. Interessant ist auch die im `https://almostsuremath.com/2011/12/30/the-doob-meyer-decomposition/` vorgeschlagene Vorgehensweise - diese werden wir nach Einführung von Semimartingalen noch einmal genauer betrachten.

[13] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1988

In diskreter Zeit ist der Beweis äußerst einfach und aufschlußreich, so dass wir in an dieser Stelle noch einmal wiederholen (siehe auch die Vorlesung Wtheorie).

Satz 68 (Doob-Meyer-Zerlegung in diskreter Zeit)**.** *Jeder adaptierte Prozess* $(X_n)_{n\geq 1}$ *mit* $E[|X_n|] < \infty$ *für alle* $n \geq 1$ *besitzt eine Zerlegung*

$$X = A + M,$$

wobei M ein Martingal ist und A vorhersehbar ist. Ist $A_1 = 0$*, so ist die Zerlegung fast sicher eindeutig.*

Beweis. Wir definieren

$$A_n = \sum_{i=2}^{n} E[X_i - X_{i-1} \mid \mathscr{F}_{i-1}]. \qquad A_1 = 0. \tag{69}$$

Dann ist A vorhersehbar und $M := X - A$ ein Martingal:

$$E[M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] = E[X_n - X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] - \underbrace{(A_n - A_{n-1})}_{E[X_n - X_{n-1}|\mathscr{F}_{n-1}]} = 0.$$

Zur Eindeutigkeit: Gilt $X = M + A$ mit einem Martingal M, so ist

$$\begin{aligned} E[X_n - X_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] &= E[M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] + (A_n - A_{n-1}) \\ &= M_{n-1} - M_{n-1} + (A_n - A_{n-1}) = A_n - A_{n-1}, \end{aligned}$$

also gilt (69) fast sicher. □

Lemma 70. *Sei $X = (X_t)_{0 \le t < \infty}$ adaptiert und càdlàg mit $E[|X_t|] < \infty$ für alle $t \ge 0$. Dann ist X genau dann ein Submartingal, wenn*

$$E[X_T] \ge E[X_S] \tag{71}$$

für alle beschränkten Stoppzeiten T, S mit $T \ge S$.

Beweis. Die Hinrichtung folgt aus dem Optional Sampling Theorem 33. Wir fixieren $0 \le s \le t$ und $F \in \mathscr{F}_s$. Dann setzen wir $S = s_F + t_{F^c}$. Mit dieser Stoppzeit ist

$$E[X_S] = E[X_s \mathbb{1}_F] + E[X_t \mathbb{1}_{F^c}].$$

Aus $E[X_t] \ge E[X_S]$ folgt nun, dass $E[X_t \mathbb{1}_F] \ge E[X_s \mathbb{1}_F]$, und somit ist X ein Submartingal. □

Dieses Resultat kann man auch auf ein Sub(Super-)martingal mit terminalen Wert erweitern.

Vorhersehbarkeit, Erreichbarkeit und Quasi-Linksstetigkeit

Definition 72. Eine zufällige Zeit heißt *vorhersehbar*, falls $[\![0,T[\![$ vorhersehbar ist.

Wir erinnern daran, dass wir ein zufälliges Intervall $A \subset \Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ vorhersehbar nennen, falls $A \in \mathscr{P}$. Zunächst ist eine vorhersehbare Zeit eine Stoppzeit, denn $\{T \leq t\} = \{\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}(t) = 1\} \in \mathscr{F}_t$, da $[\![T,\infty[\![= (\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega)\backslash[\![0,T[\![\in \mathscr{P} \subset \mathscr{O}$ (und somit ist $\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$ adaptiert).

Ganz intuitiv erhalten wir aus einer Stoppzeit T vorhersehbare Zeiten durch $T+t$ für alle $t>0$. Für das Rechnen mit stochastischen Intervallen werden wir uns oft auf die Indikator-Prozesse zurückziehen und dort die Vektorraum-Eigenschaft, etwa von $\mathscr{P}$ nutzen (bitte einmal nachrechnen).

Lemma 73. *Eine Stoppzeit T ist genau dann vorhersehbar, wenn* $[\![T]\!] \in \mathscr{P}$

Beweis. Zunächst ist $\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} \in \mathscr{P}$ für jede Stoppzeit T, da linksstetig. Damit ist

$$\mathbb{1}_{[\![T]\!]} = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} \cdot \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{P}.$$

Umgekehrt folgt

$$\mathbb{1}_{[\![0,T[\![} = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} - \mathbb{1}_{[\![T]\!]} \in \mathscr{P}. \square$$

In Ergänzung zu der T-Vergangenheit $\mathscr{F}_T$ führen wir nun die Vergangenheit bis kurz vor T ein:

$$\mathscr{F}_{T-} := \sigma\Big(\mathscr{F}_0, \{A \in \mathscr{A} : A \cap \{T<t\} \in \mathscr{F}_t, t \geq 0\}\Big). \qquad (74)$$

Lemma 75. *Seien T, $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vorhersehbarer Zeiten. Dann folgt*

(i) T ist $\mathscr{F}_{T-}$-messbar.

(ii) Ist $A \in \mathscr{F}_{T-}$, so ist T_A ebenfalls vorhersehbar.

(iii) $\sup_n T_n$ ist vorhersehbar.

(iv) Ist $S = \inf_n T_n$ und $\bigcup_n \{S = T_n\} = \Omega$, so ist S vorhersehbar.

Beweis. Zu (i) und (ii) zeigen wir

$$\mathscr{F}_{T-} = \sigma\Big(\{A \in \mathscr{F} : T_A \text{ ist vorhersehbar }\}\Big).$$

Zunächst überprüft man, dass $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{F} : T_A \text{ ist vorhersehbar }\}$ eine σ-Algebra ist, also $\sigma(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$: Da $T_\Omega = T$, ist $\Omega \in \mathscr{A}$. Für ein $A \in \mathscr{A}$ ist T_A vorhersehbar, d.h. $\mathbb{1}_{[\![T_A,\infty[\![} \in \mathscr{P}$. Da T vorhersehbar ist, ist $\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{P}$ und somit auch

$$\mathbb{1}_{[\![T_{A^c},\infty[\![} = \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} - \mathbb{1}_{[\![T_A,\infty[\![}.$$

Für eine wachsende Folge $(A_n) \subset \mathscr{A}$ ist

$$T_{\cap_n A_n} = \sup_n T_{A_n}$$

und die Behauptung folgt aus (iii). Für den Abschluss des ersten Teils beobachten wir, dass die σ-Algebra $\mathscr{F}_{T-}$ von den Mengen

$$\mathscr{G} := \mathscr{F}_0 \cup \{B \cap \{t < T\} : t \geq 0, B \in \mathscr{F}_t\}$$

erzeugt wird. Nun zeigen wir noch dass $\mathscr{G} \subset \mathscr{A}$. Für $A \in \mathscr{F}_0$ erhalten wir, dass

$$\mathbb{1}_{[\![0,T_A[\![} = \mathbb{1}_{[\![0,T[\![} + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{P}, \tag{76}$$

da wegen $A \in \mathscr{F}_0$ $\mathbb{1}_A \in \mathscr{P}$.

Andernfalls, für $A = B \cap \{t < T\} \in \mathscr{F}_t$ erhalten wir, dass $\mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{]\!]t,\infty[\![}$ ein linksstetiger und adaptierter Prozess ist, also ebenfalls vorhersehbar. Wie in (76) erhalten wir

$$\mathbb{1}_{[\![0,T_A[\![} = \mathbb{1}_{[\![0,T[\![} + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} = \mathbb{1}_{[\![0,T[\![} + \mathbb{1}_{A^c}\mathbb{1}_{]\!]t,\infty[\![}\mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![} \in \mathscr{P}. \tag{77}$$

Wir zeigen noch (iii) und (iv). Wir setzen $T = \sup_n T_n$. Zunächst ist $(\omega, t) \in [\![0, T[\![$ genau dann, wenn $T(\omega) > t$ ist. Da (t, ∞) offen ist, ist dies genau dann der Fall, wenn ein n existiert, so dass $(\omega, t) \in [\![0, T_n[\![$, so dass

$$[\![0, T[\![= \bigcup_n [\![0, T_n[\![\in \mathscr{P}.$$

Für den zweiten Teil betrachten wir $S = \inf_n T_n$. Aus $S > t$ folgt natürlich $T_n > t$ für alle n, die Rückrichtung gilt im Allgemeinen aber nicht. Dies folgt aber aus der Zusatzvoraussetzung $\bigcup_n \{S = T_n\} = \Omega$, so dass

$$[\![0, S[\![= \bigcap_n [\![0, T_n[\![\in \mathscr{P}. \square$$

Beispiel 78 (Vorhersehbare Zeiten)**.** (i) X_i i.i.d. mit $X_i \in \{-1, 1\}$ und $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $\mathscr{F}_n = \sigma(X_i \colon i \leq n)$. Dann ist z.B. vorhersehbar: $T = 5$ und nicht vorhersehbar z.B. $T_5 = \inf\{n \geq 0 \colon S_n \geq 5\}$.

(ii) X Poisson Prozess, $\mathscr{F}_t = \sigma(X_s \colon s \leq t)$, dann folgt $T_a = \inf\{t \geq 0 \colon X_t \geq a\}$ mit $a > 0$ ist Stoppzeit nach Satz 16. Allerdings ist T_a nicht vorhersehbar. ($T_1 \sim Exp(1)$)

(iii) X Brownsche Bewegung $\implies$ $T_a = \inf\{t \geq 0\colon X_t > a\}$, also Stoppzeit nach Satz 16. Da X stetig ist, ist T_a vorhersehbar.

Definition 79. Eine zufällige Zeit T heißt *unerreichbar*, falls

$$P(T = S < \infty) = 0$$

für jede vorhersehbare Zeit S. Sie heißt *erreichbar*, falls eine Folge von vorhersehbaren Zeiten (S_n) exisitiert, so dass für alle $\omega \in \Omega$

$$T(\omega) \in \{S_1(\omega), S_2(\omega), \dots\}.$$

Bemerkung 80 (Für den folgenden Beweis)**.** Für Suprema überabzählbar vieler Zufallsvariablen Φ nutzen wir

$$\psi^*(\omega) = \operatorname{esssup}_{\psi \in \Phi} \psi(\omega)$$

Das essentielle Supremum ist eine messbare Zufallsvariable ψ^*, so dass $\psi^* \geq \psi$ P-fast-sicher für alle $\psi \in \Phi$ ist. Wir werden später messbare Mengen betrachten, mit denen wir Zufallsvariablen $\mathbb{1}_A$ assoziieren.

Die Zerlegung von Stoppzeiten

Satz 81. *Sei T eine Stoppzeit. Dann gibt es eine Folge (S_n) vorhersehbarer Zeiten und eine $\mathscr{F}_T$-messbare Menge A mit $A \subseteq \{T < \infty\}$, so dass T_A eine unerreichbare Stoppzeit und T_{A^c} eine erreichbare Stoppzeit ist.*

Beweis. Wir wählen endlich viele, vorhersehbare Zeiten (S_n)und setzen

$$B(\{S_n\}) := \bigcup_n \{T = S_n < \infty\} \in \mathscr{F}_T\,.$$

Die Menge $\mathscr{B}$ aller Mengen dieser Art ist stabil unter endlicher Vereinigung und endlichen Schnitten. Wir wählen $B = \operatorname{esssup} \mathscr{B}$ und setzen $A = \{T < \infty\} \setminus B$.
B ist die Vereinigung abzählbar vieler Elemente aus $\mathscr{B}$, so dass nach Theorem A.32 in [14] folgt, dass

[14] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2011

$$B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{i \geq p_n} \{T = S(n,i) < \infty\}$$

mit vorhersehbaren Zeiten $S(n,i)$ und Zahlen $p_n \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, dass

$$[\![T_{A^c}]\!] = [\![T_B]\!] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\geq p_n} [\![S(n,i)]\!]$$

Wir zeigen noch, dass T_A nicht erreichbar ist. Angenommen T_A wäre erreichbar, also $P(T_A = S < \infty) > 0$ für eine vorhersehbare Zeit S. Es folgt, dass

$$\begin{aligned} P\big(B^c \cap B(\{S\})\big) &= P\big(A \cap \{T = S < \infty\}\big) \\ &= P(A = S < \infty) > 0\,, \end{aligned}$$

ein Widerspruch zur Maximalität von B. □

Definition 82. Ein càdlàg Prozess heißt *quasi-linksstetig*, falls

$$\Delta X_T = 0 \quad \text{fast sicher auf } \{T < \infty\}$$

für alle vorhersehbaren Zeiten T.

Wir erinnern daran, dass in Satz 27 gezeigt wurde, dass $\{\Delta X_T \neq 0\}$ eine dünne Menge ist. Wir können im Folgenden die Aussage verschärfen und zeigen, dass diese Menge von unerreichbaren Stoppzeiten ausgeschöpft wird.

Satz 83. *Sei X càdlàg und adaptiert. Dann ist X quasi-linksstetig genau dann wenn $\{\Delta X_T \neq 0\}$ ausgeschöpft wird von einer Folge unerreichbarer Stoppzeiten.*

Beweis. Wir beginnen unter der Annahme, dass X quasi-linksstetig ist. Zunächst ist nach Satz 27

$$\{\Delta X_T \neq 0\} = \bigcup_{n\geq 1} [\![T_n]\!]$$

mit Stoppzeiten $(T_n)_{n\geq 1}$. Für eine beliebige vorhersehbare Zeit gilt nach Voraussetzung $\Delta X_T = 0$ auf $\{T < \infty\}$, so dass $[\![T_n]\!] \cap [\![T]\!] = \varnothing$. Demnach ist kein T_n erreichbar.

Umgekehrt ist für eine vorhersehbare Zeit und endliche und einer ausschöpfenden Folge (T_n) aus nicht erreichbaren Stoppzeiten

$$\begin{aligned} P\big(\{\Delta X_T \neq 0\} \cap \{T < \infty\}\big) &= P\Big(\bigcup_n \{T = T_n < \infty\}\Big) \\ &\leq \sum_n P(T = T_n < \infty) = 0. \square \end{aligned}$$

Eine zufällige Zeit T, für die eine Approximation durch Stoppzeiten $T_n < T$ möglich ist, nennt man "foretellable". Es ist ein nicht ganz so einfach zu beweisendes Resultat, dass unter den üblichen Bedingungen "foretellable" gleich vorhersehbar ist. Wir zeigen einen Teil und verweisen auf die (recht spärliche) Literatur zu diesem Thema.

Theorem 84. *Wir betrachten eine stochastisches Basis* $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{F}, P)$.

(i) Ist (T_n) *eine wachsende Folge von Stoppzeiten so dass* $T_n \to T$, *mit* $T_n < T$ *auf* $\{T > 0\}$, *so ist* T *vorhersehbar.*

(ii) Ist T *vorhersehbar, so gibt es eine wachsende Folge von Stoppzeiten* (T_n) *mit* $T_n < T$ *auf* $\{T > 0\}$ *und* $\lim T_n = T$ *fast sicher. Ist die stochastische Basis vollständig, so kann man das fast sicher weglassen.*

Beweis. Teil (i) ist leicht zu beweisen. Wir nutzen

$$\rrbracket 0, T \llbracket = \cup \rrbracket 0, T_n \rrbracket,$$

und somit ist T vorhersehbar.

Wir nehmen an, dass T die Ersteintrittszeit eines stetigen Prozesses ist, etwa $\llbracket T \rrbracket = \{X = 0\}$ für einen stetigen adaptierten (und damit vorhersehbaren) Prozess X. Wir betrachten $S_n = \inf\{t \geq 0 : X \leq n^{-1}\}$, so dass $T_n := S_n \wedge n$ eine solche Folge ist.

Für den allgemeinen Fall verweisen wir auf Theorem 6.6 in [15] und Theorem 77 in [16]. □

[15] M. Métivier. *Semimartingales: a course on stochastic processes*, volume 2. Walter de Gruyter, 2011

[16] C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and potential*, volume 29 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978

Lemma 85. *Ist* M *ein lokales* $\mathbb{F}$*-Martingal, so gilt*

$$E[M_T \mid \mathscr{F}_{T-}] = M_{T-} \qquad \text{auf } \{T < \infty\}$$

für alle vorhersehbaren Zeiten T.

Beweis. Zunächst betrachten wir die Lokalisierung. Sei (T_n) eine lokalisierende Folge von M und T eine vorhersehbare Zeit. Analog zu Lemma 15 erhalten wir, dass $\{T \leq T_n\} \in \mathscr{F}_{T-}$.

Auf $\{T \leq T_n\}$ ist $E\big[M_T \mid \mathscr{F}_{T-}\big] = E[M_T^{T_n} \mid \mathscr{F}_{T-}]$ und $M_{T-} = (M^{T_n})_{T-}$. Da $\{T \leq T_n\} \to \{ T < \infty\}$, genügt es also, das Resultat für alle M_n^T, $n \geq 1$ zu beweisen. Im Folgenden betrachten wir also $M \in \mathscr{M}$.

Für eine vorhersehbare Zeit T gibt es nach Theorem 84 eine Folge von Stoppzeiten (S_n) mit $S_n < T$ auf $\{T > 0\}$ und $\lim S_n = T$. Da M ein Martingal ist, gilt

$$M_{S_n} = E[M_T \mid \mathscr{F}_{S_n}]\,.$$

Wir betrachten[17]

$$M_{S_n} = E[M_T \mid \mathscr{F}_{S_1} \vee \cdots \vee \mathscr{F}_{S_n}] \to E[M_T \mid \widetilde{\mathscr{F}}]$$

mit $\widetilde{\mathscr{F}} = \bigvee_{n \geq 1} \mathscr{F}_{S_n}$ nach dem Doobschen Konvergenzsatz. Wir zeigen $\widetilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_{T-}$. Wegen $S_n < T$ ist $\mathscr{F}_{S_n} \subseteq \mathscr{F}_{T-}$, also $\widetilde{\mathscr{F}} \subseteq \mathscr{F}_{T-}$. Umgekehrt ist für $A \in \mathscr{F}_t$

$$\begin{aligned} A \cap \{t < T\} &= A \cap \left\{ \bigcup_n \{t \leq S_n\} \right\} && \text{f.s.} \\ &= \bigcup_n \{A \cap \{t \leq S_n\}\} && \in \widetilde{\mathscr{F}} \end{aligned}$$

bis auf eine Nullmenge. Somit haben wir gezeigt, dass $M_{T_n} \to E[M_T \mid \mathscr{F}_{T-}]$. Andernfalls ist $\lim S_n = T$, so dass $\lim M_{S_n} = M_{T-}$ auf $\{T < \infty\}$. $\square$

[17] Für zwei σ-Algebren $\mathscr{F}_1$ und $\mathscr{F}_2$ ist die Vereinigung nicht unbedingt wieder eine σ-Algebra. Wir betrachten deswegen $\mathscr{F}_1 \vee \mathscr{F}_2$, die von der Vereinigung erzeugte σ-Algebra.

Die vorhersehbare Projektion

Ähnlich wie in Satz 22 erhalten wir folgendes Resultat.

Lemma 86. *Es seien S, T zwei vorhershebare Zeiten, Y $\mathscr{F}_S$-messbar und Y' $\mathscr{F}_{S-}$-messbar. Dann sind die folgenden Prozesse vorhersehbar:*

$$Y\mathbb{1}_{\rrbracket S,T\llbracket}, \quad Y'\mathbb{1}_{\llbracket S,T\rrbracket}, \quad Y'\mathbb{1}_{\llbracket S,T\llbracket}.$$

Ist Y vorhersehbar, so ist Y_T $\mathscr{F}_{T-}$-messbar.

Der Beweis kann als Übungsaufgabe geführt werden.

Theorem 87. *Es sei X ein $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Prozess. Dann existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmter Prozess ${}^pX$ mit Werten in $(-\infty, \infty]$ und folgenden Eigenschaften:*

(i) *${}^pX$ ist vorhersehbar.*

(ii) *$({}^pX)_T = E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}]$ auf $\{T < \infty\}$ für jede vorhersehbare Zeit T.*

Beweis. Die Eindeutigkeit kann als Übungsaufgabe nachgewiesen werden.

Zur Existenz gehen wir wie folgt vor: Nach dem Monotone-Klassen Theorem 19 genügt es, die Existenz für alle beschränkten, messbaren Prozesse der Form $X = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_{[u,v)}$ mit $A \in \mathscr{F}$ und $0 \leq u < v$ zu beweisen. Wir definieren das gleichgradig integrierbare Martingal M durch $M_t = E[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \geq 0$ und schließen es ab mit $M_\infty = \mathbb{1}_A$. Wir setzen

$${}^pX := M_- \mathbb{1}_{\llbracket u,v\llbracket}.$$

Dann ist ${}^pX$ vorhersehbar. Es sei T eine vorhersehbare Zeit. Nach Lemma 75 ist T $\mathscr{F}_{T-}$-messbar und somit auch $(\mathbb{1}_{\llbracket u,v\llbracket})_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$. Mit Lemma 85 folgt

$$\begin{aligned}
({}^pX)_T &= M_{T-} \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} = E[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} \\
&= E[E[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_T] \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} = E[\mathbb{1}_A \,|\, \mathscr{F}_{T-}] \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} \\
&= E[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{\{u \leq T < v\}} \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = E[X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}]
\end{aligned}$$

auf $\{T < \infty\}$ und der Beweis ist fertig. □

Wir nennen ${}^pX$ die *vorhersehbare Projektion* von X. Es lässt sich leicht zeigen, dass die Abbildung $X \mapsto {}^pX$ linear ist. Im folgenden werden wir weitere Eigenschaften der vorhersehbaren Projektion kennenlernen.

In der *Filtertheorie* ist ein Prozess X oft nicht beobachtbar, sondern man hat eine Filtration, an welche X nicht adaptiert ist und interessiert sich für die Projektion auf diese Filtration. Oft ist Vorhersehbarkeit dabei nicht so wichtig, so dass man sich für die *optionale Projektion* interessiert, die man analog zur vorhersehbaren Projektion definiert (also als optionalen Prozess, für welchen $E[X_T|\mathscr{F}_T] = ({}^oX)_T$ für alle Stoppzeiten T (siehe etwa [18]).

[18] A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probab. Surv.*, 3:345–412, 2006. ISSN 1549-5787. DOI: 10.1214/154957806000000104. URL http://dx.doi.org/10.1214/154957806000000104

Lemma 88. *Es sei X ein $\overline{\mathbb{R}}$-wertiger messbarer Prozess.*

(i) Ist ${}^pX \in \mathbb{R}$ und ist Y ein $(-\infty,\infty]$-wertiger, vorhersehbarer Prozess ist, dann gilt

$$^p(XY) = Y\,{}^pX.$$

(ii) Ist X vorhersehbar, dann gilt ${}^pX = X$.

(iii) Ist X optional, dann gilt für jede Stoppzeit T, dass

$$^p(X^T) = ({}^pX)\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} + X_T\mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}.$$

(iv) Ist $|X| \le a$ für ein $a > 0$, so ist $|{}^pX| \le a$ bis auf eine verschwindende Menge.

Beweis. Für die erste Aussagen weisen wir die beiden Eigenschaften (i) und (ii) aus der Definition in Theorem 87 nach. Zunächst ist $Y\,{}^pX$ vorhersehbar. Für Teil (ii) betrachten wir eine vorhersehbare Zeit T. Nach Lemma 86 ist $Y_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ $\mathscr{F}_{T-}$-messbar und es folgt auf $\{T < \infty\}$, dass

$$(Y\,{}^pX)_T = Y_T({}^pX)_T = Y_T E[X_T \mid \mathscr{F}_{T-}] = E[(XY)_T \mid \mathscr{F}_{T-}].$$

Die zweite Aussage folgt mit dem gleichen Argument.

Für Teil (iii) nutzen wir die Zerlegung

$$X^T = X\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]} + X_T\mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}.$$

Hierbei ist der linksstetige, adaptierte Prozess $\mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}$ vorhersehbar. Nach Satz 21 ist $X_T\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ $\mathscr{F}_T$-messbar und somit $X_T\mathbb{1}_{]\!]T,\infty[\![}$ nach Lemma 86 vorhersehbar. Die Behauptung folgt nun durch Anwendung von (i).

Für jede vorhersehbare Zeit T gilt P-fast sicher

$$|{}^pX_T| = |E[X_T \mid \mathscr{F}_{T-}]| \le E[|X_T| \mid \mathscr{F}_{T-}] \le a$$

auf $\{T < \infty\}$. Es folgt, dass $|^p X| \leq a$ bis auf Ununterscheidbarkeit und somit die Behauptung.

$\square$

Aufgabe 9 (Vorhersehbare Projektion)**.** Zeigen Sie, dass ein vorhersehbare Prozess Y genau dann die vorhersehbare Projektion von X ist, falls

$$E[Y_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = E[X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}]$$

für alle vorhersehbaren Zeiten T.

Wir wenden nun die vorhersehbare Projektion auf Martingale an und erhalten zwei schöne Aussagen.

Satz 89. *Für jedes lokale Martingal M gilt $^p M = M_-$ und $^p(\Delta M) = 0$. Für jeden quasi-linksstetigen Prozess X gilt $^p(\Delta X) = 0$ und somit $^p X = X_-$.*

Beweis. Der erste Teil ist ein unmittelbares Resultat aus Lemma 85. Denn, ist T vorhersehbar, so folgt mit dieser Aussage, dass

$$E[M_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = M_{T-}$$

auf $\{T < \infty\}$, also $^p M = M_-$, und damit auch $^p(\Delta M) = 0$.

Für einen quasi-linksstetigen Prozess gilt $\Delta X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}} = 0$ für alle vorhersehbaren Zeiten T, also $^p(\Delta X) = 0$ und somit $^p X = X_-$. $\square$

Korollar 90 (Poisson-Prozess)**.** *Betrachten Sie das Martingal*

$$M = N_t - \lambda t, \quad t \geq 0.$$

Es folgt, dass $^p(X)_t = (N_{t-} - \lambda t)$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 10 (Kálmán Filter)**.** Eine äußerst berühmte Anwendung der optionalen (vorhersehbaren) Projektion ist der Kálmán-Filter nach Rudolf Emil Kálmán. Er war ein Bestandteil des Echtzeitnavigations- und Leitsystems der Apollo Raumfähre bei ihrem Flug auf den Mond. In einer Zeiteinheit lässt er sich leicht beschreiben: Seien ξ und η standard-Normalverteilt mit Korrelation ρ, also

$$(\xi, \eta) \sim N \begin{pmatrix} 0 & 1 & \rho \\ 0, & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

Man zeigt leicht, dass $E[\xi|\eta] = \rho\eta$. Verallgemeinern Sie diese Aussage auf Normalverteilungen mit beliebigem Mittelwert und beliebiger Varianz.

Definition 91. Der *vorhersehbare Träger* einer zufälligen Menge A ist definiert durch die Menge

$$\{^p(\mathbb{1}_A) > 0\}.$$

Prozesse endlicher Variation

Definition 92. Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist von *lokal endlicher Variation*, falls

$$\mathrm{Var}(f)_t := \sup_{0 \leq t_0 \ldots t_n \leq t} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| < \infty$$

für alle $t \geq 0$. Wir nennen einen Prozess von lokal endlicher Variation, falls dessen Pfade von lokal endlicher Variation sind.

Wir definieren folgende Klassen von Prozessen: $\mathscr{V}^+ :=$ die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse A, mit $A_0 = 0$ und A wachsend.

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &:= \mathscr{V}^+ - \mathscr{V}^+, \\ \mathscr{A}^+ &:= \{A \in \mathscr{V}^+ : E[A_\infty] < \infty\}, \\ \mathscr{A} &:= \mathscr{A}^+ - \mathscr{A}^+ = \{A \in \mathscr{V} : E[\mathrm{Var}(A)_\infty] < \infty\}. \end{aligned}$$

Wachsend schließt auch konstant mit ein. Man kann zeigen (siehe etwa Golubov - [19]) [20], dass eine Funktion $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ genau dann von lokal endlicher Variation ist, wenn sie die Differenz zweier monoton wachsender Funktionen ist. Somit ist $\mathscr{V}$ die *Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse A von lokal endlicher Variation mit Start in* 0.

Für jedes $A \in \mathscr{V}$ lässt sich der Pfad $t \mapsto A_t(\omega)$ mit einem signierten Maß identifizieren welches wir mit $dA_t(\omega)$ bezeichnen (Betrachte dazu die Differenz der Lebesgue-stieltjes Maße der wachsenden Funktionen).

In diesem Fall definieren wir (pfadweise) für optionale Prozesse H

$$\left(H \cdot A\right)_t(\omega) = \begin{cases} \int_0^t H_s dA_s & \text{falls } \int_0^t |H_s| d\,\mathrm{Var}(A)_s < \infty \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir nennen $dA \ll dB$ (absolut stetig bezüglich B) falls dies wie üblich für die assozierten Maße (punktweise in ω) gilt, dh.

$$dB(\omega)(F) = 0 \implies dA(\omega)(F) = 0.$$

[19] Encyclopedia of Mathematics. Function of bounded variation, 2023. URL `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Function_of_bounded_variation&oldid=44779`. Accessed on 2023-12-04

[20] Das ist die klassische **Jordan-Zerlegung**.

Theorem 93. *Sei $A \in \mathscr{V}(\mathscr{V}^+)$ und $H \geq 0$ optional, so dass $B = H \cdot A < \infty$. Dann ist $B \in \mathscr{V}(\mathscr{V}^+)$ und $dB \ll dA$. Sind H und A vorhersehbar, so ist auch B vorhersehbar.*

Der Beweis dieses Satzes ist etwas Maßtheoretisch. Wir verweisen auf Satz 4.4.7 (a) im Skript von Stefan Tappe. Die Idee ist das Integral bezüglich A durch einen Übergangskern darzustellen um dann den Satz des Fubini anwenden zu können.

$\mathscr{V}^+$, $\mathscr{V} = \mathscr{V}^+ \ominus \mathscr{V}^+$, $\mathscr{A}^+$ und $\mathscr{A}$ sind stabil unter Stoppen. Daraus folgt:

$$\mathscr{V}_{loc} = \mathscr{V} \qquad \mathscr{V}^+_{loc} = \mathscr{V}^+$$
$$\mathscr{A}_{loc} = \mathscr{A}^+_{loc} \ominus \mathscr{A}^+_{loc}$$
$$\mathscr{A}^+ \subset \mathscr{A}^+_{loc} \subset \mathscr{V}^+,$$

also $\mathscr{A}_{loc} \subset \mathscr{V}$.

Lemma 94. *Aus $M \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$ folgt $M \in \mathscr{A}_{loc}$*

Beweis. Übungsaufgabe □

Lemma 95. *Sei $A \in \mathscr{A}$, M ein* beschränktes *Martingal und T eine Stoppzeit. Dann gilt*

$$E[M_T A_T] = E[(M \cdot A)_T]$$

Beweis. Da $\mathscr{A} = \mathscr{A}^+ \ominus \mathscr{A}^-$, reicht es $A \in \mathscr{A}^+$ zu betrachten. Sei $T_t = \inf\{s \geq 0 \colon A_s \geq t\}$. Dann ist T_t eine Stoppzeit und

$$\{T_t \leq s\} = \{A_s \geq t\}.$$

Für $H = \mathbb{1}_{[\![0,t]\!]}$ gilt

$$A_t = \int_0^\infty H_s dA_s = \int_0^\infty H_{T_s} \mathbb{1}_{\{T_s < \infty\}} ds \tag{96}$$

nach dem Transformationssatz für Maße.

$$\int g \circ f \, d\mu = \int g d(f_* \mu)$$
mit dem Push-forward Maß $f_* \mu = \mu \circ f^{-1}$.

Mit dem Monotonen Klassen Theorem (19) erhalten wir (96) für messbare und beschränkte Prozesse H. Dieser einfache Trick ist Basis des Beweises. Das Integral bezüglich des zufälligen Prozesses A konnten wir damit durch ein Integral bezüglich des deteriministischen Prozesses $B_s = s$ ersetzen. Wenden wir dann den Satz des

Fubini an, erhalten wir nur einen Erwartungswert bezüglich M und können die Martingaleigenschaft ausnutzen.

Präzsise geht das wie folgt:

$$\begin{aligned} E[M_T A_T] &= E\left[\int_0^\infty M_T \mathbb{1}_{\{s \le T\}} dA_s\right] \\ &\overset{(96)}{=} E\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_{\{T_s < \infty\}} M_T \mathbb{1}_{\{T_s \le T\}} ds\right]. \end{aligned} \tag{97}$$

Wir setzen mit dem Satz von Fubini fort und erhalten, dass

$$\begin{aligned} (97) &= \int_0^\infty E[M_T \mathbb{1}_{\{T_s < \infty\}} \mathbb{1}_{\{T_s \le T\}}] ds \\ &= \int_0^\infty E[M_{T_s} \mathbb{1}_{\{T_s < \infty\}} \mathbb{1}_{\{T_s \le T\}}] ds, \end{aligned}$$

da M ein Martingal ist. Es folgt

$$\begin{aligned} &= E\left[\int_0^\infty M_{T_s} \mathbb{1}_{\{T_s < \infty\}} \mathbb{1}_{\{T_s \le T\}} ds\right] \\ &\overset{(96)}{=} E\left[\int_0^\infty M_s \mathbb{1}_{\{s < T\}} dA_s\right] = E[(M \cdot A)_T] \square \end{aligned}$$

Korollar 98. *Sei $A \in \mathscr{A}_{loc}$ und $\mathscr{M} \in \mathscr{M}_{loc}$, lokal beschränkt, dann folgt*

$$MA - M \cdot A$$

ist ein lokales Martingal.

Beweis. Wir lokalisieren mit (T_n) so, dass $A^{T_n} \in \mathscr{A}$, $M^{T_n} \in \mathscr{M}$ und setzen

$$X = M^{T_n} A^{T_n} - M^{T_n} \cdot A^{T_n}.$$

Dann existiert X_∞ und für eine Stoppzeit T ist

$$\begin{aligned} E[X_T] &= E\big[M_T^{T_n} A_T^{T_n}\big] - E\big[(M^{T_n} \cdot A^{T_n})_T\big] \\ &\overset{(95)}{=} E\big[(M^{T_n} \cdot A^{T_n})_T\big] - E\big[(M^{T_n} \cdot A^{T_n})_T\big] = 0 \end{aligned}$$

also ist X gleichgradig integrierbares Martingal und es folgt $X \in \mathscr{M}$, die Behauptung. □

Analog zeigt man: Ist A vorhersehbar, so ist

$$MA - M_- \cdot A \in \mathscr{M}_{loc}.$$

Als Folgerung aus der Doob-Meyer Zerlegung erhalten wir folgendes Resultat.

Satz 99. *Ist M ein vorhersehbares lokales Martingal mit $M \in \mathscr{V}$ so folgt*

$$M = 0.$$

Beweis. Wir lokalisieren M. Nach Lemma 94 genügt es also die Aussage für ein $M \in \mathscr{M} \cap \mathscr{A}$ zu beweisen. Da M von endlicher Variation ist, zerlegen wir $M = A - B$ mit $A, B \in \mathscr{A}^+$. Beide sind vorhersehbar nach Theorem 93.

Nun ist aber A ein Submartingal, so dass wir die Doob-Meyer Zerlegung, Theorem 67 anwenden können. In diesem Fall ist A von Klasse (D), so dass auch Eindeutigkeit gilt[21]. Nun ist aber $A - B \in \mathscr{M}$ und $A - A \in \mathscr{M}$, also nach Eindeutigkeit $A = B$, also $M = 0$. □

[21] Das findet man sehr schön im Karatzas Shreve , Theorem I.4.10.

I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1988

Das ist ein bemerkenswertes Resultat. Es folgt zum Beispiel unmittelbar, dass die Brownsche Bewegung als stetiger (und damit vorhersehbarer) Prozess von unendlicher Variation sein muss! Das kann man natürlich auch direkt zeigen. Hiermit ist aber auch klar, dass klassische Integration im Lesbesgue-Stieltjes Sinn nicht mehr möglich ist.

Theorem 100. *Sei $A \in \mathscr{A}^+_{loc}$. Dann gibt es einen eindeutigen vorhersehbaren Prozess $A^p \in \mathscr{A}^+_{loc}$, der eine der folgenden, äquivalenten Eigenschaften erfüllt.*

(i) $A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}$,

(ii) $E[A^p_T] = E[A_T]$ *für alle Stoppzeiten T,*

(iii) $E\big[(H \cdot A)_\infty)\big] = E\big[(H \cdot A^p)_\infty)\big]$ *für alle vorhersehbaren $H \geq 0$.*

Beweis. Zunächst zeigen wir die Existenz: Sei (T_n) lokalisierende Folge, so dass $A^{T_n} \in \mathscr{A}^+$. Dann ist $(\mathscr{A}^{T_n})$ Submartingal der Klasse (D). Damit folgt aus der Doob-Meyer Zerlegung, dass ein eindeutiger Prozess B^n existiert, so dass

$$A^{T_n} - B^n \in \mathscr{M}.$$

Eindeutigkeit impliziert, dass

$$(B^m)^{T_n} = B^n$$

für alle $m \geq n$. Wir setzen

$$A^p := \sum_{n \geq 1} B^n \mathbb{1}_{]\!]T_{n-1}, T_n]\!]}$$

Für den weiteren Beweis zeigen wir die folgenden Implikationen.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Wähle $H = \mathbb{1}_{[\![0,T]\!]}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Dies zeigt man mit dem Monotonen Klassen Theorem, Theorem 19

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) Wir wählen eine lokalisierende Folge (T_n), so dass (A^{T_n}) und $(A^p)^{T_n} \in \mathscr{A}$

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad &\iff \quad (A - A^p)^{T_n} \in \mathscr{M} \quad \forall n \geq 1 \\
&\iff E[A_{T\wedge T_n}] = E[A^p_{T\wedge T_n}] \quad \forall n \geq 1\,, \text{und für alle Stoppzeiten } T \\
&\iff E[A_T] = E[A^p_T] \quad \text{für alle Stoppzeiten } T
\end{aligned}$$

wegen monotoner Konvergenz.

□

Korollar 101. *Sei $A \in \mathscr{A}_{loc}$. Dann existiert ein eindeutiger Prozess A^p so, dass*

(i) A^p *ist vorhersehbar.*

(ii) $A^p \in \mathscr{A}_{loc}$.

(iii) $A - A^p \in \mathscr{M}_{loc}$.

Den Prozess A^p nennt man Kompensator *oder* duale vorhersehbare Projektion.

Machen Sie sich den Unterschied zur vorhersehbaren Projektion klar. Die duale vorhersehbare Projektion ist die Übertragung der Doob-Meyer Zerlegung auf Prozesse von lokal endlicher und integrierbarer Variation (das ist genau die Klasse $\mathscr{A}_{loc}$).

Aufgabe 11 (Duale vorhersehbare Projektion für den Poisson Prozess)**.** Sei N ein (verallgemeinerter) Poisson Prozess. Bestimmen Sie die duale vorhersehbare Projektion N^p.

Bemerkung 102 (Eigenschaften der vorhersehbaren Projektionen)**.** Für $A \in \mathscr{A}_{loc}$ gilt

(i) A vorhersehbar $\implies A = A^p$.

(ii) $\left(A^T\right)^p = \left(A^p\right)^T$ für Stoppzeiten.

(iii) $A \in \mathscr{M}_{loc} \implies A^p = 0$.

(iv) ${}^p(A) = A_- + \Delta(A^p)$.

(v) $B \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$ und H vorhersehbar, so dass $H \cdot B \in \mathscr{A}_{loc}$, dann folgt $H \cdot B \in \mathscr{M}_{loc}$.

Semimartingale

In diesem Abschnitt lernen wir die wichtige Klasse der Semimartingale kennen. Auf der einen Seite ist dies die größte Klasse von stochastischen Prozessen, bezüglich derer eine stochastische Integration möglich ist. Auf der anderen Seite sind dies auch genau die Basis von arbitragefreien Finanzmärkten, wie wir in der folgenden Vorlesung zeigen werden.

Die Klasse von Semimartingalen enthält viele spannende Prozesse. Natürlich sind Brownschen Bewegung und Poisson Prozess Semimartingale, aber auch allgemeiner Lévy-Prozesse, zusammengesetzte Poisson Prozesse und viele andere mehr.

Definition 103. Wir definieren die Menge alle quadratintegrierbaren Martingale $\mathscr{H}^2$ durch

$$\mathscr{H}^2 = \{M \in \mathscr{M} : \sup_{t \geq 0} E[X_t^2] < \infty\}$$

Satz 104. *Seien $M, N \in \mathscr{H}^2_{loc}$. Dann gibt es einen eindeutigen vorhersehbaren Prozess $\langle M, N \rangle \in \mathscr{V}$, so dass*

$$MN - \langle M, N \rangle \in \mathscr{M}_{loc}\,.$$

Sind $M, N \in \mathscr{H}^2$ folgt $\langle M, N \rangle \in \mathscr{A}$ und $MN - \langle M, N \rangle \in \mathscr{M}$.

Den Prozess $\langle M, N \rangle$ nennen wir die *vorhersehbare Kovariation* von M und N. Wir schreiben $\langle M \rangle := \langle M, M \rangle$ und nennen $\langle M \rangle$ die vorhersehbare quadratische Variation von M.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass es für die Existenz von $\langle M, N \rangle$ genügt, die Existenz von $\langle M \rangle$ zu zeigen. Dazu verwenden wir die *Polarisierungsformel*:

$$MN = \frac{1}{4}\big((M+N)^2 - (M-N)^2\big). \tag{105}$$

Da sowohl $\mathscr{H}^2_{loc}$ als auch $\mathscr{M}_{loc}$ Vektorräume sind, gilt dann

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}\big[\langle M+N \rangle - \langle M-N \rangle\big],$$

und es reicht demnach, $\langle M \rangle$ zu betrachten.

Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine lokalisierende Folge für M. Dann ist $M^{T_n} \in \mathscr{H}^2$ und mit der Doobschen Maximal Ungleichung aus Lemma 55 (angewendet auf das Submartingal $|M^{T_n}|$) folgt, dass $E[\sup_{t\in\mathbb{R}_+}(M_t^{T_n})^2] < \infty$.

Nun ist das Submartingal $(M^{T_n})^2$ von der Klasse (D) und die Existenz (und Eindeutigkeit) von $\langle M^{T_n}\rangle$ folgt aus der Doob-Meyer Zerlegung und $(M^{T_n})^2 - \langle M^{T_n}\rangle \in \mathscr{M}$.

Wir zeigen nun, dass $\langle M^{T_{n+1}}\rangle^{T_n} = \langle M^{T_n}\rangle$: Da $\mathscr{M}$ stabil unter Stoppen ist gilt, dass $((M^{T_{n+1}})^2 - \langle M^{T_{n+1}})^{T_n}\rangle \in \mathscr{M}$. Mit $(M^{T_{n+1}})^{T_n} = M^{T_n}$ folgt die Behauptung.

Der Prozess $\langle M\rangle$ mit $\langle M\rangle_t := \lim_{n\to\infty}\langle M\rangle_t^{T_n}$ erfüllt nun die Behauptung. Die Eindeutigkeit kann als Übungsaufgabe gezeigt werden. Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil, da man hier keine lokalisierende Folge von Stoppzeiten benötigt.

□

Aufgabe 12 (Quadratische Variation einer Brownschen Bewegung)**.** Ein Wiener Prozess mit Varianzfunktion σ $\big(\sigma(t) = E[W_t^2]\big)$ ist ein stetiges Martingal mit $\langle W\rangle_t = \sigma_t^2$.

Zur Erinnerung: Eine Brownsche Bewegung ist in unserer Definition allgemein gefasst. In der Literatur betrachtet man oft folgenden Spezialfall welchen wir *einfache Brownsche Bewegung* nennen. B ist stetig, hat unabhängige Zuwächse

$$B_t - B_s \quad \sim N\big(0, \sigma^2(t-s)\big)$$

für $\sigma > 0$. Ist $\sigma = 1$, so heißt B *Standard Brownsche Bewegung*. Betrachten wir etwa eine Zeittransformation

$$T(t) = \int_0^t f(s)ds \qquad \text{mit } f \geq 0\,.$$

So ist $B' = (B_{T(t)})_{t\geq 0}$ typischerweise keine einfache Brownsche Bewegung mehr. Trotzdem hat B' unabhängige und normalverteilte Zuwächse, ist also im sinne unserer allgemeinen Definition eine Brownsche Bewegung.

Aufgabe 13 (Brownsche Bewegung in diskreter Zeit)**.** Betrachten wir (X_i) i.i.d. $\sim N\big(0, \sigma^2(i)\big)$ und definieren

$$B_t = \sum_{i=1}^{\lfloor t\rfloor} X_i\,, \quad t \geq 0$$

so ist B eine Brownsche Bewegung. Berechnen Sie σ^2.

Definition 106. Zwei lokale Martingale M, N heißen *orthogonal*, falls

$$MN \in \mathscr{M}_{loc} \qquad (\text{und somit}\langle M, N\rangle = 0).$$

Ein lokales Martingal X heißt *purely discontinuous* (p.d.) falls $X_0 = 0$ und X orthogonal zu jedem stetigen lokalen Martingal ist.

Beispiel 107 (Poisson Prozess)**.** $(N_t - \lambda t) = X_t$. Man beachte

$$\sum_{s \le t} \Delta X_s \neq X_t \,,$$

also gibt es einen Unterschied zwischen reinen Sprungprozessen und purely discontinuous Prozessen.

Lemma 108. *Sei $M \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$. Es folgt M ist purely discontinuous.*

Beweis. Sei N ein beschränktes, stetiges Martingal. Nach Lemma 94 ist $M \in \mathscr{A}_{loc}$. Für ein stetiges, beschränktes Martingal N folgt aus Korollar 98, dass

$$MN - N \cdot M \in \mathscr{M}_{loc} \,.$$

Nach Bemerkung 102 ist $N \cdot M \in \mathscr{M}_{loc}$, also auch MN.

Jedes stetige Martingal ist lokal beschränkt. Damit folgt die Aussage durch Lokalisierung. □

L^2-Theorie für Martingale.

Wir definieren ein Skalarprodukt auf $\mathscr{H}^2$ durch

$$(M, N)_{\mathscr{H}^2} := E[M_\infty N_\infty] = E[\langle M, N \rangle_\infty] + E[M_0 N_0]$$

Lemma 109. $(\mathscr{H}^2, (\cdot,\cdot)_{\mathscr{H}^2})$ *ist ein Hilbertraum.*

Beweis. Ein Martingal M ist durch seinen abschließenden Wert M_∞ bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmt (folgt nach der Doobschen Maximalungleichung Lemma 55). Dies zeigt u.a. die wohldefiniertheit des Skalarprodukts bzw. der erzeugten Norm.
Wir zeigen nun die Vollständigkeit. Sei M eine Cauchyfolge in $\mathscr{H}^2$. Dann ist $(M^n_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in L^2 und da dieser vollständig ist, existiert $M_\infty \in L^2$, so dass

$$\|M^n_\infty - M_\infty\|_{L^2} \to 0.$$

Das Martingal $M \in \mathscr{H}^2$ gegeben durch $M_t = E[M_\infty \mid \mathscr{F}_t]$ erfüllt nun:

$$\|M^n - M\|_{\mathscr{H}^2} \to 0$$

□

Den Hilbertraum $\mathscr{H}^2 \cap \{M_0 = 0\}$ aller quadratintegrierbaren Martingale mit Start in der Null kann man orthogonal in stetige und purely discontinuous Martingale zerlegen, das heißt

$$\mathscr{H}^2 \cap \{M_0 = 0\} = \mathscr{H}^{2,d} \oplus \mathscr{H}^{2,c}.$$

Diese Aussage erhalten wir aus dem Projektionsatz, da die Menge aller stetigen quadratintegrierbaren Martingale mit Start in der Null ein abgeschlossener linearer Unterraum von $\mathscr{H}^2 \cap \{M_0 = 0\}$ bilden und dessen orthogonales Komplement per Definition die purely discontinuous Martingale sind.

Aus einer Lokalisierung dieses Arguments erhält man folgenden Satz.

Satz 110. *Sei $M \in \mathscr{M}_{loc}$, dann gibt es stetiges lokales Martingal $M^c \in \mathscr{M}_{loc}$ und ein purely discontinuous lokales Martingal $M^d \in \mathscr{M}_{loc}$, so dass*

$$M = M_0 + M^c + M^d .$$

Beweis. Dies folgt aus obiger Argumentation. □

Satz 111. *Sei $a > 0$ und $M \in \mathscr{M}_{loc}$. Dann gibt es (nicht eindeutig) $M', M'' \in \mathscr{M}_{loc}$ mit*

$$M = M_0 + M' + M''$$

und $M' \in \mathscr{V}$ sowie $|\Delta M''| \leq a$. (Also: $M'' \in \mathscr{H}^2_{loc}$)

Beweis. Der Beweis kann als Übungsaufgabe geführt werden. □

Mit $\mathscr{L}$ bezeichnen wir die Teilmenge von $\mathscr{M}_{loc}$ für die $M_0 = 0$ gilt

Definition 112. (i) Gilt für den Prozess X, dass

$$X = X_0 + M + A \tag{113}$$

mit $M \in \mathscr{L}$ und $A \in \mathscr{V}$, so heißt X *Semimartingal*. Mit $\mathscr{S}$ bezeichnen wir den Raum der Semimartingale.

(ii) Ist A vorhersehbar, so heißt X *spezielles Semimartingal*.
In diesem Fall ist die Zerlegung in (113) eindeutig und wir nennen sie kanonische Zerlegung von X. Den Raum der speziellen Semimartingale bezeichnen wir mit $\mathscr{S}_p$.

Die Eindeutigkeit sieht man leicht: Ist $X = X_0 + M + A = X_0 + N + B$, so ist

$$M - N = B - A \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V} ,$$

vorhersehbar. Ein vorhersehbares lokales Martingal von endlicher Variation ist aber konstant nach Satz 99.

Beispiel 114 (Ein spezielles Semimartingal)**.** Ein Beispiel für ein spezielles Semimartingal mit $A = 0$ ist $(N_t - \lambda t)_{t \geq 0}$.

Für einen adaptierten càdlàg-Prozess X definieren wir den Prozess X^* durch

$$X_t^* := \sup_{s \leq t} |X_s|, \qquad t \geq 0.$$

Als wachsender Prozess ist $X^* \in \mathscr{V}^+$.

Lemma 115. *Für ein lokales Martingal M folgt $M^* \in \mathscr{A}_{loc}^+$.*

Beweis. Zur Illustration beweisen wir dieses einfache Resultat. Wir wählen eine lokalisiserende Folge (T_n), so dass $M^{T_n} \in \mathscr{M}$, $n \geq 1$. Definieren wir

$$S_n := T_n \wedge \inf\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |M_t| > n\},$$

so ist (S_n) ebenfalls lokalisiserende Folge (siehe Beispiel 29). Weiterhin ist

$$M_{S_n}^* \leq \sup_{0 \leq s < S_n} |M_s| + |M_{S_n}| \leq n + |M_{S_n}| \in \mathscr{L}^1,$$

und die Behauptung folgt. □

Lemma 116. *Ist $A \in \mathscr{V}$ vorhersehbar, so ist $A \in \mathscr{A}_{loc}$.*

Beweis. Wir betrachten den Prozess $\mathrm{Var}(A)$, welcher vorhersehbar ist und setzen $T_n := \inf\{t \geq 0 : \mathrm{Var}(A)_t \geq n\}$, eine Folge von vorhersehbaren Zeiten. Nun wissen wir noch nicht, dass $\mathrm{Var}(A)_{T_n} \leq n$, aber für alle Zeitpunkte vor T_n ist das der Fall. Dies nutzen wir nun aus.

Sei für jedes n (S_m^n) eine Folge von Stoppzeiten, die von unten gegen T_n konvergieren (nach Theorem 84). Dann gibt es eine Zahl $M = M(n)$, so dass $P(S_M^n < T_n) \leq 2^{-n}$. Wir setzen $S_n := \sup_{i \leq n} S_{M(i)}^i$. Es folgt, dass $S_n < \sup_{m \leq n} T_m = T_n$ fast sicher, also $\mathrm{Var}(A)_{S_n} \leq n$. Außerdem ist $(S_n) \to \infty$. □

Satz 117. *Für ein Semimartingal X sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X is ein spezielles Semimartingal.*

(ii) *Es gibt eine Semimartingal-Zerlegung $X = X_0 + M + A$ mit $A \in \mathscr{A}_{loc}$.*

(iii) *Für jede Semimartingal-Zerlegung $X = X_0 + M + A$ gilt $A \in \mathscr{A}_{loc}$.*

(iv) *Es gilt $X^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$.*

Beweis. (iii) $\Rightarrow$ (ii): Ist klar.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Hat X die Darstellung $X = X_0 + M + A$ mit $A \in \mathscr{A}_{loc}$, so ist $A - A^p$ ein lokales Martingal und A^p ein vorhersehbarer Prozess mit endlicher Variation und wir erhalten die gewünschte Zerlegung

$$X = X_0 + (M + A - A^p) + A^p,$$

und X ist ein spezielles Semimartingal.
(i) $\Rightarrow$ (iv): Ist $X = X_0 + M + A$ ein spezielles Semimartinal in der kanonischen Zerlegung, so ist A vorhersehbar. Außerdem ist $A^* \in \mathscr{V}^+$. Nach Lemma 116 ist $A^* \in \mathscr{A}_{loc}$. Nach Lemma 115 gilt $M^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$, und somit folgt $X^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$.
(iv) $\Rightarrow$ (iii): Wir betrachten das Semimartingal $X = X_0 + M + A$. Nach Lemma 115 gilt $M^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$ und mit $X^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$ folgt $A^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$.

Nach Lemma 116 ist der vorhersehbare Prozess $\mathrm{Var}(A)_- \in \mathscr{A}_{loc}$ und

$$\mathrm{Var}(A) \leq \mathrm{Var}(A)_- + |A_-| + |A| \leq \mathrm{Var}(A)_- + 2A^*,$$

so das $A \in \mathscr{A}_{loc}$. $\square$

Lemma 118. *Es sei $X \in \mathscr{S}_p$ ein spezielles Semimartingal mit kanonischer Zerlegung $X = X_0 + M + A$. Dann gilt ${}^p(\Delta X) = \Delta A$.*

Beweis. Da A vorhersehbar ist, ist ΔA ebenfalls vorhersehbar. Nach Satz 89 gilt außerdem, dass ${}^p(\Delta M) = 0$. Die Behauptung folgt aus ${}^p(\Delta X) = {}^p(\Delta M) + {}^p(\Delta A) = \Delta A$. $\square$

Satz 119. *Es sei $X = X_0 + M + A \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal.*

(i) Falls ein $a \geq 0$ mit $|\Delta X| \leq a$ existiert, dann gilt $X \in \mathscr{S}_p$, und $|\Delta A| \leq a$ und $|\Delta M| \leq 2a$.

(ii) Ist X stetig, so ist $X \in \mathscr{S}_p$, und die Prozesse M und A in der kanonischen Darstellung sind stetig.

Beweis. Teil (ii) folgt sofort aus (i).

Für Teil (i) betrachten wir die Folge von Stoppzeiten $T_n := \inf\{t \geq 0 : |X_t| > n\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X^*_{T_n} \leq |X^*_{T_n-}| + |\Delta X^*_{T_n}| \leq \sup_{0 \leq t < T_n} |X_t| + |\Delta X_{T_n}| \leq n + a,$$

und somit folgt $X^* \in \mathscr{A}^+_{loc}$. Also gilt nach Satz 117, dass $X \in \mathscr{S}_p$.

Nach Lemma 118 gilt ${}^p(\Delta X) = \Delta A$ und somit $|\Delta A| = |{}^p(\Delta X)| \leq a$. Schließlich folgt $|\Delta M| \leq |\Delta X| + |\Delta A| \leq 2a$. □

Wie wirkt sich quasi-Linksstetigkeit auf ein spezielles Semimartingal aus ? Aus Lemma 118 folgt ${}^p(\Delta X) = \Delta A$. Dann gilt $\Delta A_T = E[\Delta X_T \,|\, \mathscr{F}_{T-}] = 0$ fast sicher auf $\{T < \infty\}$ für jede vorhersehbare Zeit T, also ist auch A quasi-linksstetig und damit auch M. Da A vorhersehbar ist, folgt $\Delta A = 0$ und somit ist A stetig.

Aufgabe 14 (Stabilität unter Stoppen von $\mathscr{S}$ und $\mathscr{S}_p$)**.** Zeigen Sie, dass die Klassen $\mathscr{S}$ und $\mathscr{S}_p$ stabil sind unter Stoppen.

Satz 120. *Zu jedem Semimartingal X existiert ein bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmtes stetiges lokales Martingal X^c, so dass für jede Semimartingal-Zerlegung*

$$X = X_0 + M + A$$

gilt $M^c = X^c$.

Beweis. Betrachten wir eine weitere Zerlegung $X = X_0 + N + B$ gegeben. Wir zerlegen $M = M^c + M^d$ und $N = N^c + N^d$ nach Satz 110. Dann gilt

$$M^c + M^d + A = M + A = X - X_0 = N + B = N^c + N^d + B.$$

Damit ist

$$(M^c - N^c) + (M^d - N^d) = B - A \in \mathscr{M}_{\text{loc}} \cap \mathscr{V}$$

ein lokales Martingal. Nach Lemma 108 ist dieses lokale Martingal purely discontinuous, und somit $M^c = N^c$ bis auf Ununterscheidbarkeit. □

Wir nennen X^c den *stetigen Martingalanteil* von X. Hierbei sollte in der Notation X^c beachtet werden, dass stets der *Martingalanteil* gemeint ist, eine etwas mißverständliche (aber übliche) Notation. Wie sieht der verbleibende Martingalteil aus? Das beantwortet der Folgende Satz.

Satz 121. *Zu jedem $X \in \mathscr{S}$ existiert eine Zerlegung*

$$X = X_0 + X^c + M + A$$

mit einem lokalen Martingal $M \in \mathscr{H}^2_{loc}$ was $M_0 = 0$ erfüllt, purely discontinuous ist und $A \in \mathscr{V}$.

Beweis. Nach Satz 120 existiert eine Zerlegung

$$X = X_0 + X^c + N + B$$

mit einem lokalen Martingal N welches purely discontinuous ist und $B \in \mathscr{V}$.

Nach Satz 111 existiert eine Zerlegung $N = N' + N''$ mit einem purely discontinous, lokalen Martingal $N' \in \mathscr{M}_{loc} \cap \mathscr{V}$ und $N'' \in \mathscr{H}^2_{loc}$, so dass $N'_0 = N''_0 = 0$.

Wegen $N'' = N - N'$ ist N'' ebenfalls purely discontinuous. Wir setzen $M := N'' \in \mathscr{H}^2_{\text{loc}}$ und $A := N' + B \in \mathscr{V}$. Dann ist M purely discontinuous, es gilt $M_0 = 0$ und

$$\begin{aligned} X &= X_0 + X^c + N + B = X_0 + X^c + N' + N'' + B \\ &= X_0 + X^c + M + A. \end{aligned}$$

□

Das Stochastische Integral

Die allgemeine Idee für stochastische Integration ist, das Integral zunächst für einfach Prozesse zu definieren. Dann sucht man sich eine geeignete Topologie um das Integral als Grenzwert von einfachen Integranden stetig zu definieren.

Wir nennen H einfach, falls

$$H = Y\mathbb{1}_{[\![0]\!]} \quad \text{oder} \quad H = Y\mathbb{1}_{]\!]S,T]\!]}$$

mit Stoppzeiten S und T und beschränktem und $\mathscr{F}_S$-messbarem Y ist. Für ein solches H definieren wir

$$(H \cdot X)_t := \begin{cases} 0 & \text{falls } H = Y\mathbb{1}_{[\![0]\!]} \\ Y \cdot (X_{T\wedge t} - X_{S\wedge t}) & \text{sonst} \end{cases} \tag{122}$$

Mit $\mathscr{E}$ bezeichnen wir den Raum der einfachen Prozesse.

Das stochastische Integral $H \cdot X$ ist definiert für $X \in \mathscr{S}$ und H vorhersehbar und lokal beschränkt.

Theorem 123. *Sei X ein Semimartingal. Die Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ hat eine Erweiterung von $\mathscr{E}$ in den Raum lokal beschränkten, vorhersehbaren Prozesse so, dass*

(i) $H \cdot X$ ist adaptiert und càdlàg.

(ii) $H \mapsto H \cdot X$ ist linear.

(iii) Konvergiert eine Folge von vorhersehbaren Prozessen (H^n) punktweise gegen ein H, und ist $|H^n| \leq K$ mit einem lokal beschränkten, vorhersehbaren Prozess K, so gilt

$$(H^n \cdot X)_t \longrightarrow P(H \cdot X)_t \qquad \forall\, t > 0$$

wobei $\xrightarrow{P}$ die Konvergenz in Wahrscheinlichkeit ist.

Diese Erweiterung ist auch eindeutig (bis auf Ununterscheidbarkeit). Außerdem gilt noch etwas allgemeiner, dass

$$\sup_{s\leq t} |(H^n \cdot X)_s - (H \cdot X)_s| \xrightarrow{P} 0.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

(i) Ist $X \in \mathscr{V}$, so ist die Erweiterung gerade das Lebesgue-Stieltjes Integral.

(ii) $X \in \mathscr{H}^2$ (quadratintegrierbare Martingale) Die Idee von K. Itô war, eine Isometrie auszunutzen. Wir betrachten den Vektorraum

$\mathscr{E}'$, der durch die einfachen Prozesse aufgespannt wird. Wie man leicht prüft, ist für $H = \sum_{i=1}^n H^i = \sum_{i=1}^n K^i$ auch

$$H \cdot X = \sum_{i=1}^{n} H^i \cdot X = \sum_{i=1}^{n} K^i \cdot X$$

wegen (122). Damit ist diese Abbildung bereits die gesuchte Erweiterung auf $\mathscr{E}'$. Nun möchten wir diese Definition noch auf Reihen ausdehnen.

Dazu betrachten wir $H \in \mathscr{E}'$. Dann lässt sich H darstellen als

$$H = Y_0 \mathbb{1}_{[\![0]\!]} + \sum_{i=1}^{n} Y_i \mathbb{1}_{]\!]t_i, t_{i+1}]\!]},$$

wobei Y_i beschränkt und $\mathscr{F}_{t_i}$-messbar ist. Der Prozess

$$H \cdot X = \sum_i Y_i \left(X^{t_{i+1}} - X^{t-i}\right)$$

ist ein quadratintegrierbares Martingal (also $H \cdot X \in \mathscr{H}^2$) und

$$(H \cdot X)^2 - H^2 \cdot \langle X \rangle = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} Y_i Y_j \left(X^{t_{i+1}} - X^{t_i}\right)\left(X^{t_{j+1}} - X^{t_j}\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 \left[(X^{t_{i+1}})^2 - \langle X \rangle_{t_{i+1}} - (X^{t_i})^2 + \langle X \rangle_{t_i} - 2X^{t_i}(X^{t_{i+1}} - X^{t_i}) \right]$$

ist ebenfalls ein Martingal nach Satz 104. Eindeutigkeit der vorhersehbaren quadratischen Variation nach diesem Satz impliziert, dass

$$\langle H \cdot X \rangle = H^2 \cdot \langle X \rangle. \tag{124}$$

Wir betrachten nun den Hilbertraum $L^2(X) = L^2(\Omega \times \mathbb{R}_{ge0}, \mathscr{P}, m)$ mit dem endlichen Maß

$$m(B) = E[\mathbb{1}_B \cdot \langle X \rangle_\infty],$$

auf dem Maßraum $(\Omega \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathscr{P})$. Das zugehörige Skalarprodukt ist

$$(M, N)_{\mathscr{H}^2} := E[\langle M, N \rangle_\infty] + E[M_0 N_0].$$

Mit $(H \cdot X)_0 = 0$ erhalten wir aus (124), dass

$$\| H \cdot X \|_{\mathscr{H}^2} = E[\langle H \cdot X \rangle_\infty] = E[H^2 \cdot \langle X \rangle_\infty] = m(H^2).$$

Da $\mathscr{E}'$ dicht liegt in $L^2(X)$ erlaubt die Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ eine stetige Erweiterung von $L^2(X)$ nach $\mathscr{H}^2$ und wir bezeichnen diese Erweiterung ebenfalls mit $H \cdot X$. Mit Aufgabe 15 erhalten wir für $H^n \to H$ in $L^2(X)$, dass

$$H^n \cdot X \to H \cdot X$$

in $\mathscr{H}^2$. Wieder unter Verwendung von Aufgabe 15 erhalten wir auch gleichmäßige Konvergenz.

(iii) Durch Lokalisierung folgt die Aussage auch für $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ und $H \in L^2_{loc}$.

(iv) Als letztes bleibt der allgemeine Fall: Sei $X \in \mathscr{S}$. Dann ist $X = X_0 + M + A$ mit $M \in \mathscr{H}^2_{loc}$ und $A \in \mathscr{V}$. Wir setzen

$$H \cdot X = H \cdot M + H \cdot A.$$

Eindeutigkeit der beiden Erweiterungen liefert Eindeutigkeit des Integrals (bis auf Ununterscheidbarkeit).

□

Aufgabe 15 (Der Hilbertraum $\mathscr{H}^2$)**.** Zeigen Sie, dass für $M^n \to M$ in $\mathscr{H}^2$ folgt, dass

$$\sup_{x \geq 0} |M^n_s - M_s| \xrightarrow{L^2} 0.$$

Man erhält folgende Eigenschaften des stochastischen Integrals:

(i) $H \mapsto H \cdot X$ ist linear.

(ii) $H \cdot X$ ist ein Semimartingal.

(iii) Ist X ein lokales Martingal, so auch $H \cdot X$.

(iv) ist $X \in \mathscr{V}$, so ist $H \cdot X$ das Lebesgue-Stieltjes Integral.

(v) $(H \cdot X)_0 = 0$ und $H \cdot (X - X_0) = H \cdot X$.

(vi) $K \cdot (H \cdot X) = (KH) \cdot X$.

(vii) $\Delta(H \cdot X) = H \cdot \Delta X$.

(viii) Ist T vorhersehbar und Y $\mathscr{F}_T$-messbar, dann folgt

$$(Y \mathbb{1}_{[\![T]\!]}) \cdot X = Y \cdot \Delta X_T \mathbb{1}_{[\![T,\infty[\![}$$

In Teil (iii) des Beweises wurde folgendes Resultat bewiesen:

Theorem 125. *Sei $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$. Die Abbildung $H \mapsto H \cdot X$ hat eine Erweiterung von $\mathscr{E}$ auf L^2_{loc} so, dass*

(i) $H \cdot X \in \mathscr{H}^2_{loc}$

(ii) $H \in L^2(X) \iff H \cdot X \in \mathscr{H}^2$

(iii) Für $X, Y \in \mathscr{H}^2_{loc}$ und vorhersehbare $K, M \in L^2_{loc}(X)$ folgt

$$\langle H \cdot X, K \cdot Y \rangle = HK \cdot \langle X, Y \rangle .$$

Die quadratische Kovariation

Definition 126. Seien $X, Y \in \mathscr{S}$. Die *quadratische Kovariation* von X und Y ist definiert durch

$$[X, Y] = XY - X_0Y_0 - X_- \cdot Y - Y_- \cdot X. \tag{127}$$

Wir erhalten wieder eine Polarisationsformel wie bei $\langle X, Y\rangle$ (siehe Gleichung (105)). Außerdem kann $[X, Y]$ durch Riemannsummen approximiert werden, siehe etwa Abschnitt 3.1.1. in [22]:

[22] E. Eberlein and J. Kallsen. *Mathematical Finance*. Springer, 2019

$$\sum_{m\geq 1} \big(X_{T(n,m+1)\wedge t} - X_{T(n,m)\wedge t}\big)\big(Y_{T(n,m+1)\wedge t} - Y_{T(n,m)\wedge t}\big) \to [X, Y]_t$$

mit $n \to \infty$. Hierbei ist $(T(n, m))_{m\geq 1}$, für jedes $n \geq 1$ eine wachsende Folge von Stoppzeiten die gegen Unendlich streben, so dass $\sup_{n\in\mathbb{N}}(T(n, m + 1) \wedge t - T(n, m) \wedge t) \to 0$ für alle $t \geq 0$.

Wir setzen $[X] := [X, X]$.

Satz 128. *Sei $X, X' \in \mathscr{S}$ und $Y \in \mathscr{V}$*

(i) $[X, X'] \in \mathscr{V}$ *und* $[X] \in \mathscr{V}^+$,

(ii) $[X, Y] = \Delta X \cdot Y$,

(iii) Ist Y vorhersehbar dann ist $[X, Y] = \Delta Y \cdot X$,

(iv) Ist X oder Y stetig, so folgt $[X, Y] = 0$.

Der Beweis kann als Übungsaufgabe geführt werden, verwenden Sie die Riemannapproximation.

Satz 129. *Sind $X, Y \in \mathscr{S}$, so gilt*

$$[X, Y]_t = \langle X, Y\rangle_t + \sum_{s\leq t} \Delta X_s \Delta Y_s. \tag{130}$$

Der Beweis kann wieder als Übungsaufgabe geführt werden. Zeigen Sie zunächst, dass es genügt $[X]$ zu betrachten und nutzen Sie dann die Darstellung $X = X_0 + X^c + M + A$ mit einem stetigen Martingal X^c, $A \in \mathscr{V}$ und $M \in \mathscr{H}^2_{loc}$.

Die Itô-Formel

Wohl eine der wichtigsten Formeln dieser Vorlesung ist die berühmte Itô-Formel[23].

[23] Kiyoshi Itō ist die korrekte Schreibweise für seinen Namen, obwohl Ito selbst lieber Itô benutzt hat - was wir hier adaptieren.

Theorem 131 (Itô-Formel). *Sei $X = (X^1, \dots, X^d)$ ein d-dimensionales Semimartingal und $f \in \mathscr{C}^2$. Dann ist $f(X) \in \mathscr{S}$ und*

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \sum_{i \le d} D_i f(X_-) \cdot X^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j \le d} D_{ij} f(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle \\ &\quad + \sum_{0 \le s \le \cdot} \Big(f(X_s) - f(X_{s-}) - \sum_{i \le d} D_i f(X_{s-}) \Delta X_s^i \Big). \end{aligned} \tag{132}$$

Beweis. Wir zeigen dies zunächst für Polynome. Wir setzen

$$\widehat{f}(x,y) = f(x) - f(y) - \sum_{i \le d} D_i f(y)(x_i - y_i).$$

Gelte zunächst $f(x) = x_k\, g(x)$, $k \in \{1, ..., d\}$, wobei g die Itô-Formel (132) erfüllt. Dies gilt offensichtlich für $g = 1$. Falls es nun für f der Form $x_k g(x)$ gilt, dann induktiv auch für alle Funktionen der Form $(x_k)^n$, $n \in \mathbb{N}$ und da die Itô-Formel offensichtlich für Summen von Funktionen gilt, folgt damit, dass es für Polynome gilt.

Wir zeigen die Aussage also für $f(x) = x_k g(x)$: Sei $f(X)$ ein Semimartingal, dann gilt mit Definition 126, dass

$$f(X) = f(X_0) + X_-^k \cdot g(X) + g(X_-) \cdot X^k + [X^k, g(X)].$$

Da g Gleichung (132) erfüllt, gilt

$$\begin{aligned} g(X) &= g(X_0) + \sum_{i \le d} D_i g(X_-) \cdot X^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j \le d} D_{ij} g(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle + \sum_{0 \le s \le \cdot} \widehat{g}(X_s, X_{s-}) \\ &=: g(X_0) + A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in obige Gleichung folgt, dass

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + X_-^k \sum_{i \le d} D_i g(X_-) \cdot X^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j \le d} X_-^k D_{ij} g(X_-) \cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c} \rangle \\ &\quad + \sum_{0 \le s \le \cdot} X_-^k \widehat{g}(X_s, X_{s-}) + g(X_-) \cdot X^k + [X^k, g(X)] \end{aligned} \tag{133}$$

Da $g(X)$ die Itô-Formel erfüllt, ist $A_3 \in \mathscr{V}$ und da für $Y \in \mathscr{V}$, $X \in \mathscr{S}$: $[X, Y] = \Delta X \cdot Y$ und falls Y vorhersehbar $[X, Y] = \Delta Y \cdot X$ gilt folgt mit der Bilinearität von $[\cdot,\cdot]$, dass

$$\begin{aligned}
[X^k, g(X)] &= [X^k, \sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} g(X_-)\cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle + \sum_{0\le s\le \cdot} \widehat{g}(X_s, X_{s-})] \\
&= \sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot [X^k, X^i] \qquad (134)\\
&\quad \underbrace{+\frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} g(X_-)\cdot [X^k, \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle]}_{=0} \\
&\quad + \sum_{0\le s\le \cdot} \Delta X^k_s \big(g(X_s) - g(X_{s-}) - \sum_{i\le d} D_i g(X_{s-})\Delta X^i_s\big)
\end{aligned}$$

da $\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle$ vorhersehbar und stetig. Weiter gilt für $i \neq k$:

$$D_i f(x) = x_k D_i g(x) \qquad (135)$$
$$D_k f(x) = g(x) + x_k D_k g(x) \qquad (136)$$
$$D_{ik} f(x) = D_{ki} f(x) = D_i g(x) + x_k D_{ik} g(x) \qquad (137)$$
$$D_{kk} f(x) = 2 D_k g(x) + x_k D_{kk} g(x) \qquad (138)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(X,Y) &= f(X) - f(Y) - \sum_{i\le d} D_i f(Y)(X^i - Y^i) \\
&\overset{(135),(136)}{=} X^k g(X) - Y^k g(Y) - Y^k \sum_{i\le d} D_i g(Y)(X^i - Y^i) - X^k g(Y) + Y^k g(Y) \\
&= Y^k g(X) - Y^k g(Y) - Y^k \sum_{i\le d} D_i g(Y)(X^i - Y^i) - Y^k g(X) + Y^k g(Y) - X^k g(Y) + X^k g(X) \\
&= Y^k \widehat{g}(X,Y) + (g(X) - g(Y))(X^k - Y^k) \qquad (139)
\end{aligned}$$

Damit gilt in (133) mit (136), dass

$$\sum_{i\le d} X^k_- D_i g(X_-)\cdot X^i = \sum_{i\le d} D_i f(X_-)\cdot X^i - g(X_-)\cdot X^k \qquad (140)$$

und mit (137) und (138)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} X^k_- D_{ij} g(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle &= \frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} f(X_-)\cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle \\
&\quad - 2\frac{1}{2}\sum_{k\neq i\le d} D_i g(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle \qquad (141)\\
&\quad - 2\frac{1}{2} D_k g(X_-)\cdot \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} f(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle - \sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle.
\end{aligned}$$

Mit der Rechnung für $\widehat{f}(X,Y)$, (139), folgt unter $Y = X_-$

$$\sum_{0\le s\le\cdot} X^k_- \widehat{g}(X_s, X_{s-}) = \sum_{0\le s\le \cdot} \widehat{f}(X_s, X_{s-}) - (g(X) - g(X_-))\Delta X^k_s.$$

Schließlich folgt aus (133) mit der Rechnung für $[X^k, g(X)]$:

$$
\begin{aligned}
f(X) &= f(X_0) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i\le d} D_i f(X_-)\cdot X^i - \cancel{g(X_-)\cdot X^k}}_{(140)} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} f(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle - \sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle}_{(141)} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{0\le s\le\cdot}\widehat{f}(X_s, X_{s-}) - \cancel{\sum_{0\le s\le\cdot}(\Delta X^k_s g(X_s) - g(X_{s-}))}}_{(139)} \\
&\quad + \cancel{g(X_-)\cdot X^k} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot[X^k, X^i] + \cancel{\sum_{0\le s\le\cdot}\Delta X^k_s(g(X_s) - g(X_{s-}))} - \sum_{0\le s\le\cdot}\sum_{i\le d}\Delta X^k_s \Delta X^i_s D_i g(X_{s-})}_{(134)} \\
&= f(X_0) + \sum_{i\le d} D_i f(X_-)\cdot X^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j\le d} D_{ij} f(X_-)\cdot\langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle + \sum_{0\le s\le\cdot}\widehat{f}(X_s, X_{s-}) \\
&\quad + \underbrace{\sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot\big([X^k, X^i] - \langle X^{i,c}, X^{j,c}\rangle\big)}_{=A} - \sum_{0\le s\le\cdot}\sum_{i\le d}\Delta X^k_s \Delta X^i_s D_i g(X_{s-})
\end{aligned}
$$

Da für zwei Semimartingale X, Y

$$[X, Y] = \langle X^c, Y^c\rangle + \sum_{0\le s\le\cdot}\Delta X_s \Delta Y_s$$

gilt, folgt

$$A = \sum_{i\le d} D_i g(X_-)\cdot\sum_{0\le s\le\cdot}\Delta X^k_s \Delta X^i_s.$$

Dies ist ein reiner Sprung-Prozess und das stochastische Integral begrechnet sich folglich zu

$$A = \sum_{0\le s\le\cdot}\sum_{i\le d}\Delta X^k_s \Delta X^i_s D_i g(X_{s-}),$$

womit die Behauptung gezeigt ist □

Das stochastische Exponential

Als erste Anwendung der Ito-Formel betrachten wir stochastische Exponentiale. Wir nennen Y ein *stochastisches Exponential*, falls Y die folgende Darstellung hat:

$$Y = 1 + Y_- \cdot X \tag{142}$$

mit einem Semimartingal X.

Beispiel 143 (Geometrische Brownsche Bewegung)**.** Ein tpyisches Beispiel ist die geometrische Brownsche Bewegung. Sei X eine Brownsche Bewegung und

$$Y = \exp\Big(X_t - \frac{1}{2}t\Big), \qquad t \geq 0.$$

Dann ist Y ein stochastisches Exponential.

Theorem 144. *Sei X ein Semimartingal. Dann gibt es eine eindeutige Lösung $\mathscr{E}(X)$ von (142) gegeben durch*

$$\mathscr{E}(X)_t := Y_t = \prod_{0<s\leq t} (1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s} \cdot \exp\Big(X_t - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle_t\Big), \qquad t \geq 0.$$

Beweis. Zunächst betrachten wir

$$\log\Big[\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}\Big] = \sum_{0<s\leq t}\Big[\log(1+\Delta X_s) - \Delta X_s\Big]. \qquad (145)$$

Nun ist $|\log(1+x) - x| \leq c|x|^2$ und wegen $\sum_{0<s\leq t}(\Delta X_s)^2 < \infty$, folgt die absolute Konvergenz von (145). Damit existiert $\prod_{0<s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}$ und folglich $\mathscr{E}(X)$.

Für den zweiten Teil betrachten wir

$$Y = f(A,B)$$

mit $f(A,B) = e^A \cdot B$. Wir setzen

$$A = X - X_0 - \frac{1}{2}\langle X^c\rangle, \qquad B = \prod_{0<s\leq \cdot}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}. \qquad (146)$$

Wir berechnen $D_1 f = f$, $D_{11} f = f$ und $D_2 f = e^A$ sowie $D_{22} f = 0$. Die beiden Ableitungen D_{12} und D_{21} werden nicht benötigt, da die zugehörige Kovariation verschwindet.

B ist ein Prozess endlicher Variation. Wir setzen $Z = (A,B)$, so dass $Y = f(Z)$ ist. Mit der Itô Formel (132) folgt

$$\begin{aligned}
f(Z_t) &= f(Z_0) + D_1 f(Z_-)\cdot A_t + D_2 f(Z_-)\cdot B_t \\
&\quad + \frac{1}{2}D_{11} f(Z_-)\cdot\langle A^c\rangle + 0 + 0 + 0 \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t}\Big(f(Z_s) - f(Z_{s-}) - D_1 f(Z_-)\Delta A_s - D_2 f(Z_-)\Delta B_s\Big) \\
&= 1 + (Y_-\cdot A)_t + (e^{A_-}\cdot B)_t + \frac{1}{2}Y_-\cdot\langle X^c\rangle \\
&\quad + \sum_{0<s\leq t}\Big(Y_s - Y_{s-} - Y_{s-}\,\Delta X_s - e^{A_{s-}}\,\Delta B_s\Big).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$Y_s = Y_{s-}\, e^{\delta X_s}\,(1+\Delta X_s)\, e^{-\Delta X_s} = Y_{s-}(1+\Delta X_s),$$

da $e^{\Delta A_s} = e^{\Delta X_s}$ und wir erhalten

$$\sum_{0<s\le t} \Big(Y_s - Y_{s-} - Y_{s-}\,\Delta X_s - e^{A_{s-}}\,\Delta B_s \Big) = -(e^{A_-}\cdot B)_t,$$

da $B = \sum \Delta B$ nach der Definition von B. Schließlich ist noch nach der Definition von A in Gleichung (146)

$$Y_-\cdot A + \frac{1}{2} Y_-\cdot\langle X^c\rangle = Y_-\cdot X - \frac{1}{2} Y_-\cdot\langle X^c\rangle + \frac{1}{2} Y_-\cdot\langle X^c\rangle = Y_-\cdot X.$$

Damit erhalten wir, dass

$$Y_t = 1 + (Y_-\cdot X)_t + (e^{A_-}\cdot B)_t - (e^{A_-}\cdot B)_t = 1 + (Y_-\cdot X)_t$$

und die Behauptung ist bewiesen. □

Der Satz von Girsanov

Wir setzen für jede Stoppzeit T

$$P_T := P|_{\mathscr{F}_T}\,.$$

Hierbei ist $P|_{\mathscr{F}_T}$ das auf die σ-Algebra $\mathscr{F}_T$ eingeschränkte Maß. P' heißt *lokal absolut stetig* bezüglich P, falls

$$P'_t \ll P_t\,, \qquad \forall t \ge 0;$$

und wir schreiben hierfür kurz $P' \overset{loc}{\ll} P$.

Lemma 147. *P' ist lokal absolut stetig bezüglich P genau dann, wenn es eine wachsende Folge (T_n) von Stoppzeiten mit $T_n \to \infty$, P'-fast sicher gibt, so dass*

$$P'_{T_n} \ll P_{T_n}\,, \qquad \forall n\,.$$

Beweis. „⇒“ klar.
„⇐“ Sei $F \in \mathscr{F}_t$ mit $P(F) = 0$. Dann ist

$$P'(F) = \lim_{n\to\infty} P'\big(F \bigcap_n \{T_n > t\}\big).$$

Es folgt, dass $P\big(F \cap \{T_n > b\}\big) = 0$, wobei $F \bigcap_n \{T_n > t\} \in \mathscr{F}_{T_n}$. Mit $P'_{T_n} \ll P_{T_n}$ folgt, dass $F \cap \{T_n > t\}$ eine P'_{T_n}-Nullmenge ist, also $P'\big(F \cap \{T_n > t\}\big) = 0$ und somit $P'(F) = 0$ und es folgt $P'_t \ll P_t$. □

Theorem 148. *Sei $P' \overset{loc}{\ll} P$. Dann gibt es ein eindeutiges P-Martingal Z so, dass*

$$Z_t = \frac{dP'_t}{dP_t}, \quad t \geq 0. \tag{149}$$

Man kann Z so wählen, dass $Z \geq 0$. Z heißt Dichte *von P' bezüglich P und es gilt $E[Z_t] = 1$ für alle $t \geq 0$. Gilt sogar $P' \ll P$, so ist Z gleichgradig integrierbar und*

$$Z_\infty = \frac{dP'}{dP}.$$

Beweis. Wir setzen für $n \in \mathbb{N}$

$$U^n = \frac{dP'}{dP_n}.$$

Dann ist $U \in L^1(P)$. Dann definieren wir $Y_t^n = E[U^n \mid \mathscr{F}_t]$ für $t \geq 0$. Offensichtlich kann man Y^n so wählen, dass $Y^n \geq 0$ P-fast sicher. Wir definieren

$$Z = \sum_{n \geq 1} Y^n \mathbb{1}_{[\![n-1, n [\![}.$$

Z ist càdlàg, adaptiert und $Z \geq 0$. Für $F \in \mathscr{F}_t$ ist

$$\begin{aligned} E[\mathbb{1}_F Z_t] &= \sum_{n \geq 1} E[\mathbb{1}_F \mathbb{1}_{[\![n-1,n [\![}(t) Y_t^n] \\ &= \sum_{n \geq 1} E[\mathbb{1}_F \mathbb{1}_{[\![n-1,n [\![}(t) U^n] = \sum_{n \geq 1} E'[\mathbb{1}_F \mathbb{1}_{[\![n-1,n [\![}(t)] \\ &= E'[\mathbb{1}_F \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{[\![n-1,n [\![}(t)] = P'(F) = E[\mathbb{1}_F Z_s], \end{aligned}$$

also ist Z ein P-Martingal und $\frac{dP'_t}{dP_t} = Z_t$. Die Eindeutigkeit von Z folgt aus der Eindeutigkeit der Gleichung (149). □

Beispiel 150 (Dichte-Prozess)**.** Ein typisches Beispiel für einen Dichteprozess Z ist eine geometrische Brownsche Bewegung

$$Z_t = e^{aW_t - \frac{a^2 t}{2}}, \qquad t \geq 0.$$

Dies ist kein gleichgradig integrierbares Martingal, also gilt der zweite Teil in obigem Satz nicht. Wir werden diesen Dichteprozess im Zusammenhang mit dem Satz von Girsanov noch genauer studieren.

Lemma 151. *Sei $P' \overset{loc}{\ll} P$ mit Dichteprozess Z und M' càdlàg. Dann gilt:*

(i) $M'Z$ ist P-Martingal genau dann, wenn M' ein P'-Martingal ist.

(ii) $M'Z$ ist P-lokales Martingal genau dann, wenn M' ein P'-lokales Martingal ist.

(iii) Ist M' P'-lokales Martingal mit lokalisierender Folge (T_n) und ist $P(T_n \to \infty) = 1$, so ist $M'Z$ P-lokales Martingal.

Beweis. Zu (i): Sei $F \in \mathscr{F}_t$. Dann ist

$$E'[\mathbb{1}_F M_t] = E[\mathbb{1}_F M_t Z_t]\,.$$

Demnach ist $E'[M'_t - M'_s \mid \mathscr{F}_s] = 0$ genau dann wenn

$$E[Z_t M'_t - Z_s M'_s \mid \mathscr{F}_s] = 0$$

und (i) folgt.

Zu (ii): sei (T_n) lokalisierende Folge von $M'Z$ und $T = \lim_n T_n$. Dann ist

$$P'(T < \infty) = E'[\mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = E[Z_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}] = 0\,,$$

da $P'_T \ll P_T$ (Lemma 147). Also lokalisieren wir und

$$M'^{T_n} Z = (M'Z)^{T_n} + M'_{T_n}(Z - Z_{T_n})\mathbb{1}_{[\![T_n,\infty[\![}$$

ist P-Martingal. Also folgt (ii) aus (i).
(iii) ist klar. □

Theorem 152 (Satz von Girsanov)**.** *Sei $P' \overset{loc}{\ll} P$ mit Dichteprozess Z. Sei $M \in \mathscr{M}_{loc}(P)$ mit $M_0 = 0$. Dann ist*

$$M' = M - \frac{1}{Z} \cdot [M, Z]$$

P'-fast sicher wohldefiniert und P'-lokales Martingal. Gilt $[M,Z] \in \mathscr{A}_{loc}$, so ist

$$M'' = M - \frac{1}{Z_-}\langle M, Z\rangle$$

ein P'-lokales Martingal.

Beweis. Zur Wohldefiniertheit: Wir haben eventuell Probleme mit $\frac{1}{Z}$ bzw. $\left(\frac{1}{Z_-}\right)$. Dazu definieren wir $T_n = \inf\left\{t \geq 0 \colon Z_t < \frac{1}{n}\right\}$.

Nach Theorem 148 ist $P'(T_n < \infty) = E[Z_{T_n} \mathbb{1}_{\{T_n < \infty\}}] \leq \frac{1}{n}$. Damit folgt, dass

$$P'\big(\bigcap_n \{T_n < \infty\}\big) = \lim_{n\to\infty} P'(T_n < \infty) = 0.$$

Das heißt $T_n \uparrow \infty$ P-fast sicher. Dann ist $A := \frac{1}{Z} \cdot [M, Z]$ wohldefiniert auf $[\![0, T_n[\![$ für alle $n \geq 1$ und somit für alle $t \geq 0$.

(i) Nach Gleichung (127) gilt, dass

$$MZ = M_- \cdot Z + Z_- \cdot M + [Z, M].$$

Damit ist $MZ - [M, Z]$ ein P-lokales Martingal. Da A nach Satz 128 von endlicher Variation ist, gilt

$$\begin{aligned} AZ &= Z_- \cdot A + A_- \cdot Z + [Z, A] = Z_- \cdot A + A_- \cdot Z + \Delta Z \cdot A \\ &= Z \cdot A + A_- \cdot Z, \end{aligned}$$

ebenfalls mit Hilfe von Satz 128. Da $A_- \cdot Z$ ein lokales Martingal ist, ist $AZ - Z \cdot A$ ebenfalls ein lokales Martingal. Eine Addition ergibt $MZ - [M, Z] - AZ + Z \cdot A = (M - A)Z$ ist lokales Martingal, also folgt die Behauptung aus Lemma 151.

(ii) folgt analog.

□

Aufgabe 16 (Maßwechsel bei der Brownschen Bewegung)**.** Eine typische Anwendung des Satz von Girsanov ist der Drift-Wechsel be einer Brownschen Bewegung W. Sei

$$Z_t = \exp\Big(\theta W_t - \frac{\theta^2 t}{2}\Big), \qquad 0 \leq t \leq T,$$

also $Z_t = Z_0 + Z_- \cdot \theta W_t$. Dann ist nach dem Satz von Girsanov

$$\begin{aligned} M'_t &= W_t - \frac{1}{Z} \cdot [W, Z]_t \\ &= W_t - \frac{1}{Z} \cdot \theta Z d\langle W \rangle_t = W_t - \theta t \end{aligned}$$

ein lokales Martingal. Da die quadratische Variation durch den Maßwechsel nicht geändert wird, ist $(W_t - \theta t)_{0 \leq t \leq T}$ eine Brownsche Bewegung unter P'.

Ein kurzer Ausflug in die Finanzmathematik

Stochastische Finanzmathematik befasst sich mit dem Studium von Finanzmärkten und deren strukturellen Gegebenheiten. Basierend auf der von Kiyoshi Itô entwickelten Theorie der stochastischen Integration entwickelten Fisher Black, Myron Scholes und Robert Merton eine Theorie von Handelsstrategien und deren Zusammenhang mit der Bewertung von Optionen. Diese Anfang der 70er Jahre veröffentlichten Arbeiten wurden mit einem Nobelpreis geehrt[24].

[24] Siehe `https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1997/press-release/`

In den 90er Jahren wurde diese Theorie von Freddy Delbaen und Walter Schachermayer auf Semimartingale erweitert. Dies zeigt zum einen, wie fruchtbar die Anwendung von Techniken der stochastischen Prozesse in der Finanzmathematik ist - aber auch umgekehrt: Die möglichst realitätsgetreue Modellierung von Aktienprozessen (und anderen Finanzprodukten) befruchtete die Entwicklung von neuen Techniken für stochastische Prozesse ganz wesentlich.

In diesem Abschnitt wird ein kurzer Einblick gegeben, als Referenz bietet sich hier das hervorragend Buch von Ernst Eberlein und Jan Kallsen [25] an. Weiterführende Literatur sind zum Beispiel [26] und [27].

[25] E. Eberlein and J. Kallsen. *Mathematical Finance*. Springer, 2019

[26] F. Delbaen. *The mathematics of arbitrage*. Springer, 2006

[27] Y. Kabanov. *Markets with Transaction Costs Mathematical Theory*. Springer, 2009

Eine Aktie ist zunächst einmal ein aktiv gehandeltes Produkt dessen Preis durch Angebot und Nachfrage entsteht. Jeder Preis ist eine beobachtete Transaktion eines Käufers und eines Verkäufers, die sich geeinigt haben. Das deutet zunächst einmal auf einen reinen Sprungprozess hin. Das Ende der 60er von Samuelson vorgeschlagene Modell einer geometrischen Brownschen Bewegung approximiert diese vielen Transaktionen mit einem einfachen, stetigen Diffusionsmodell[28].

[28] Siehe auch `https://www.macroption.com/black-scholes-history/`

Beispiel 153 (Geometrische Brownsche Bewegung)**.** Das *Black-Scholes Modell* beschreibt den Aktienkurs $S = (S_t)_{t\geq 0}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit dem Drift $\mu \in \mathbb{R}$ und der Volatilität $\sigma > 0$:

$$S_t = S_0 \exp\Big((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t\Big), \quad t \geq 0 \tag{154}$$

Die zugehörige Filtration $\mathbb{F}$ ist die von W erzeugte Filtration, die so erweitert ist, dass sie die üblichen Bedingungen erfüllt.

Empirische Untersuchungen zeigen, dass typische Aktienreturns deutlich breitere Ausschläge haben als die geometrische Brownsche Bewegung. Sprungprozesse oder Prozesse mit stochastischer Volatilität passen deutlich besser an empirische Daten.

Beispiel 155 (Lévy-Prozess)**.** Ein Lévy-Prozess X ist ein adaptierter Prozess mit stationären, und unabhängigen Zuwächsen der in 0 startet:

1. $X_0 = 0$,
2. $X_t - X_s$, $t > s$ ist unabhängig von $\mathscr{F}_s$,
3. $X_t - X_s$ hat die gleiche Verteilung wie X_{t-s}.

Somit ist eine Brownsche Bewegung ein Lévy-Prozess, aber auch ein zusammengesetzter Poisson-Prozess. Ein Lévy-Prozess ist ein Semimartingal und mit einem allgemeinen zentralen Grenzwertsatz kann man zeigen, dass die *L'evy-Khintchine Formel* gilt: Für eine fixierte Truncierungsfunktion h ist

$$E\left[e^{i\,uX_t}\right] = e^{\phi(u)t}, \tag{156}$$

mit dem charakteristischen Exponenten

$$\phi(u) = iu^\top b - \frac{1}{2}u^\top cu + \int \left(e^{iu^\top x} - 1 - iu^\top h(x)\right)K(dx). \tag{157}$$

Hierbei ist b der *Drift*, c die *Diffusionsmatrix* und K ein *Lévy-Maß*.

Intuitiv gesehen besteht ein Lévy-Prozess aus einem linearen Drift, einer Brownschen Bewegung und einer Folge von zusammengesetzten Poisson-Prozessen, mit immer häufigeren aber immer kleineren Sprüngen. Hierdurch erhält man bereits die Existenz eines solchen Prozesses. Ein zusammengesetzter Poisson Prozess mit Sprungverteilung F und Sprungintensität λ hat das Lévy-Maß $K = \lambda F$.

Aktienmodelle

Nun können wir bereits ein paar berühmte Modelle vorstellen. Da Aktien keine negativen Werte annehmen können ist es äußerst nützlich, den logarithmierten Aktienkurs $X = \ln S$ zu betrachten, und diesen etwa als Lévy-Prozess zu modellieren.

Das Merton-Modell Das von Robert Merton vorgestellte Modell erweitert das Black-Scholes Modell um Sprünge. Hierbei ist der Lévy-prozess X gegeben durch

$$X_t = X_0 + \mu t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

mit i.i.d. $Y_1, Y_2, \dots$ und $Y_1 \sim \mathcal{N}(\beta, \gamma^2)$. Wir erhalten das charakteristische Triplet

$$(b, c, K) = (\mu, \sigma^2, \lambda \mathcal{N}(\beta, \gamma^2)).$$

Ein Finanzmarkt besteht nun aus d Aktien $S^1, \dots, S^d$, wobei wir zur Einfachheit $d = 1$ wählen und $S^1 = S$ schreiben. Darüber hinaus gibt es ein Bankkonto $S^0 > 0$. Das Bankkonto kann genutzt werden um Geld zwischen verschiedenen Zeitpunkten zu transferieren. Die Annahme $S^0 > 0$ garantiert, dass Geld nicht *komplett* verloren geht. Das Investment von etwa einem Euro kann aber sehr wohl verlustreich sein.

Ein Investment in die Aktie wird durch einen Handelsprozess H beschrieben. Kauft man z.B. am Zeitpunkt 0 H_0 Aktien zum Preis S_0 und verkauft man sie zum Zeitpunkt 1 wieder, so erhält man den Gewinn

$$H_0 \Delta S_1 = H_0(S_1 - S_0).$$

Dies erinnert an das stochastische Integral von einfachen Prozessen - in der Tat, wählt man die Diskretisierung immer feiner und feiner so erhält man als Gewinnprozess einer Anlagestrategie H das stochastische Integral

$$(H \cdot S)_t = \int_0^t H_s dS_s.$$

Startet man an 0 mit dem Wert V_0 so erhält man

$$V_t^H = V_t = V_0 + (H \cdot S)_t$$

eine solche Strategie nennt man selbst-finanzierend, denn das anfänglich investierte Kapital wird kontinuierlich re-investiert und weder wird Geld entnommen noch Geld nachträglich eingezahlt.

Wir definieren nun den diskontierten Wertprozess durch

$$X^i = \frac{S^i}{S^0}, \quad i = 0, \dots, d,$$

so dass $X^0 = 1$ ist. Eine Strategie ist selbst-finanzierend bezgl. S genau dann wenn sie selbstfinanzierend bezgl. X ist.

Wir betrachten den Finanzmarkt auf einem endlichen Zeithorizont $[0, T]$.

Definition 158. Eine *Arbitrage* ist eine selbst-finanzierende Handelsstrategie H so dass $V_0^H \leq 0$, $V_T^H \geq 0$ und $P(V_T^H > 0) > 0$.

Wir erhalten einen Hauptsatz der Wertpapierbewertung (der allgemeine Beweis ist technisch anspruchsvoll - wir werden ihn in der nächsten Vorlesung ausführlich behandeln). Wir nennen ein Maß Q ein *Martingalmaß*, falls der diskontierte Preisprozess X

ein Q-Martingal ist. Im Allgemeinen werden wir nicht mehr mit Martingalen arbeiten können, sonder lokale Martingale benutzen - für den Moment nehmen wir beispielsweise an, dass X und alle Handelsstrategien H jeweils beschränkt sind.

Theorem 159 (FTAP). *Unter geeigneten Voraussetzungen erhalten wir: Der Markt ist frei von Arbitrage genau dann wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Wir gehen die Idee des Beweises durch: $\Leftarrow$ - Angenommen Q sein ein äquivalentes Martingalmaß. Dann gilt auch $V_0^H \leq 0$, $V_T^H \geq 0$ Q-fast sicher sowie $Q(V_T^H > 0) > 0$. Da aber X ein Q-Martingal ist, ist auch $(H \cdot X)$ eines (da H beschränkt angenommen) und somit

$$E_Q[(H \cdot X)_T] = 0,$$

ein Widerspruch zu $Q(V_T^H > 0) > 0$.

Die Rückrichtung ist aufwendiger: Wir betrachten den Kegel

$$K = \{H \cdot X_T : H \text{ selbstfinanzierend}\}$$

der erreichbaren diskontierten Ansprüche. Wegen No-Arbitrage schneidet ist der Schnitt mit der konvexen Menge

$$M = \{\mathscr{F}_T \ni \xi \geq 0 : E[\xi] = 1\}$$

leer. Kann man ein Trennungssatz (Hahn-Banach) anwenden, so gibt es eine ZV Y so dass $E[ZY] = 0$ für alle $Z \in K$ und $E[ZY] > 0$ für alle $Z \in M$. Aus der zweiten Bedingung folgt, dass $Y > 0$ fast sicher.

Damit können wir ein äquivalentes Maß definieren durch

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{Y}{E[Y]}.$$

Aus der ersten Bedingung folgt, dass $E_Q[Z] = E_Q[H \cdot X_T] = 0$ für alle $K \ni Z = H \cdot X_T$ selbstfinanzierenden Handelsstrategien H. Wählen wir $F \in \mathscr{F}_T$ und

$$H_s(\omega) = \mathbb{1}_F(\omega)\mathbb{1}_{(t,T]}(s)$$

so erhalten wir

$$0 = E_Q[H \cdot X_T] = E_Q[\mathbb{1}_F X_T] - E_Q[\mathbb{1}_F X_t],$$

also ist X ein Q-Martingal und das Martingalmaß ist gefunden.

Das FTAP ist ein zentrales Theorem der Finanzmathematik. Es sagt uns darüber hinaus auch aus, wie man Optionen (nicht gehandelte Derivate) arbitragefrei bewertet.

- Eine *europäische Option* ist ein Derivat, was an einem zukünftigen Zeitpunkt T eine zufällige, d.h. $\mathcal{F}_T$-messbare Auszahlung D_T verspricht.
- Die Frage ist jetzt - was ist ein arbitragefreier Preis von D_T. Wir suchen also einen Prozess D der die Auszahlung D_T erreicht, den man zu dem Markt S hinzufügen kann, so dass der Markt arbitrage-frei ist.

Definition 160. Die *risikoneutrale Bewertungsformel* bewertet das Derivat mit diskontierter Auszahlung D_T and D_t durch eine Martingalregel. Sei Q ein äquivalentes Martingalmaß und

$$D_t = E_Q[D_T|\mathscr{F}_t], \qquad 0 \leq t \leq T.$$

.

Dann ist der erweiterte (diskontierte) Markt (X, D) frei von Arbitrage (ÜA).

Heben wir zB. $S^0_t = e^{rt}$ dann erhalten wir die einfache Formel

$$\pi_t = E_Q[e^{-r(T-t)} D_T|\mathscr{F}_t] \tag{161}$$

Bid-Ask-Spreads

In der Realität gibt es unterschiedliche Preise ob wir kaufen oder verkaufen. Das nennt man den Bid-Ask Spread. Wir haben jeweils $\underline{S} \leq \bar{S}$, so dass man für $\bar{S}$ kaufen kann und für $\underline{S}$ wieder verkaufen kann. Auch Transaktionskosten kann man so modellieren.

Auch hier kann man, mit etwas mehr Aufwand selbst-finanzierende Handelsstrategien definieren. Wie könnte hier ein FTAP aussehen?

Die Black-Scholes Formel

Ist das in Beispiel 153 eingeführte Modell, das so genannte Black-Scholes Modell, frei von Arbitrage? Hierzu zeigen wir, dass ein äquivalentes Martingalmaß existiert. Dazu verwenden wir den Satz von Girsanov, Satz 152.

Satz 162. *Das Black-Scholes Modell ist frei von Arbitrage.*

Beweis. In dem Satz von Girsanov, 152, betrachten wir als Kandidat für die Dichte Z das stochastische Exponential

$$Z = 1 + (\alpha Z \cdot B),$$

mit Lösung

$$Z_t = \exp\left(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}\right), \qquad t \geq 0.$$

Dann ist

$$B' = B - \frac{1}{Z}\langle B, Z\rangle$$

ein Martingal unter dem Maß Q gegeben durch $dQ = Z_T dP$. Auoerdem ist B' stetig mit quadratischer Variation $\langle B'\rangle_t = \langle B\rangle_t = t$, und somit eine Brownsche Bewegung.

Wir erhalten

$$\frac{1}{Z}\langle B, Z\rangle_t = \alpha t,$$

so dass $B'_t = B - \alpha t$ eine Q-Brownsche Bewegung ist. Mit der Wahl

$$\alpha = -\frac{\mu - r}{\sigma}$$

erhalten wir, dass Q sogar ein Martingalmaß ist. □

Ein europäischer Call überträgt dem Käufer das Recht, die Aktie an T zum Preis K zu kaufen. Damit ist die Auszahlung

$$(S_T - K)^+ = \max\{S_T - K, 0\}.$$

Dann ist der Preis des Europäischen Calls an $t = 0$ gegeben durch

$$\pi^{\text{Call}} = E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+].$$

Lemma 163. *Diesen Erwartungswert können wir ausrechnen und erhalten*

$$\pi^{Call} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2), \tag{164}$$

mit

$$d_{1/2} = \frac{\log \frac{S_0}{Ke^{-rT}} \pm \frac{\sigma^2 T}{2}}{\sigma\sqrt{T}}. \tag{165}$$

Beweis. Zur Berechnung gehen wir wie folgt vor: Wir definieren

$$\alpha := \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}}, \;\; \mu := \ln S_0 + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \;\; \widetilde{\sigma} := \sigma\sqrt{T},$$

und erhalten

$$\begin{aligned} E_Q[e^{-rT}(S_T - K)^+] &= \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^x - K\right)^+ \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx \\ &= \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} e^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_1} - K \underbrace{\alpha \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2}\right) dx}_{=:I_2}. \end{aligned}$$

Wir berechnen im folgenden das Integral I_1. Durch eine quadratische Ergänzung stellt man den Integranden als Produkt einer Normalverteilungsdichte und eines variablenfreien Korrekturterms dar. Der Integrand von I_1 hat die Form $\exp(\lambda(x))$ mit

$$\begin{aligned}
\lambda(x) &= x - \frac{(x-\mu)^2}{2\widetilde{\sigma}^2} = -\frac{-2\widetilde{\sigma}^2 x + x^2 - 2\mu x + \mu^2}{2\widetilde{\sigma}^2} \\
&= -\frac{\Big(x - (\mu + \widetilde{\sigma}^2)\Big)^2 + \Big(\mu^2 - (\mu + \widetilde{\sigma}^2)^2\Big)}{2\widetilde{\sigma}^2} \\
&= -\frac{\Big(x - (\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T} + (\ln S_0 + rT)
\end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit durch einsetzen von $\mu + \widetilde{\sigma}^2 = \ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T$ und $\frac{(\mu+\widetilde{\sigma}^2)^2 - \mu^2}{2\widetilde{\sigma}^2} = \mu + \frac{\widetilde{\sigma}^2}{2} = \ln S_0 + rT$ erhält.
Unter Beachtung von $\alpha e^{\ln S_0 + rT} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} S_0$ folgt

$$I_1 = \frac{S_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} \int_{\ln K}^{\infty} \exp\left(-\frac{\Big(x - (\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T)\Big)^2}{2\sigma^2 T} \right) dx. \tag{166}$$

Betrachten wir $\widetilde{Z} \sim \mathscr{N}\Big(\ln S_0 + (r + \frac{\sigma^2}{2})T,\ \sigma^2 T\Big)$, dann ist $\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ und Gleichung (166) lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}
I_1 &= S_0\, Q(\widetilde{Z} > \ln K) \\
&= S_0\, Q\left(\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > \frac{\ln K - \ln S_0 - (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \\
&= S_0\, Q\left(\frac{\widetilde{Z} - \ln S_0 - (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} > -d_1 \right) \\
&= S_0 \Big(1 - \Phi(-d_1)\Big) = S_0 \Phi(d_1),
\end{aligned}$$

wobei man die Symmetrieeigenschaft der Standardnormalverteilung ausnutzt. Die Berechnung von Integral I_2 geht analog, hier kann sogar auf die quadratische Ergänzung verzichtet werden.

□

Weiter beweisen wir das fundamentale

Theorem 167. *Im Black-Scholes Modell kann man jede Option mit $\mathscr{F}_T$-messbaren und quadrat-integrierbarem Payoff $D_T \geq 0$ replizieren und der Wert des replizierenden Portfolios ist gerade*

$$V_t = \mathbb{E}^Q\Big[e^{-r(T-t)} D_T \Big| \mathscr{F}_t \Big]. \tag{168}$$

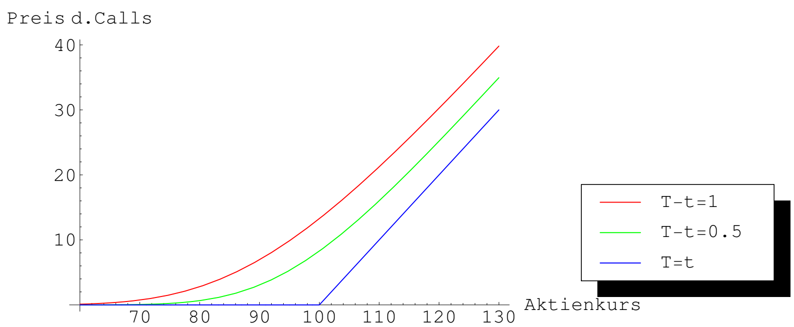

Abbildung 3: Preise eines Calls im Black-Scholes Modell. Dabei ist $S_0 = 100, \sigma = 0.2, r = 0.1$.

Für den Beweis nutzen wir das folgende Theorem 169 über die Repräsentation von Brownschen Martingalen. Leider liefert dieses Theorem nur die Existenz einer replizierenden Strategie, nicht aber ihre genaue Form oder ihren Wert. Da wir aber wissen, dass selbstfinanzierende Handelsstrategien Martingale unter Q bilden, werden wir den Wert trotzdem als Erwartungswert ausdrücken können.

Sei $\mathbb{F}$ die natürliche Filtration der Brownschen Bewegung $(B_t)_{t\in[0,T]}$. Für $f \in \mathcal{H}^2$ ist $(\int_0^t f_s\, dB_s)_{t\in[0,T]}$ ein quadrat-integrierbares Martingal. Das folgende Theorem zeigt, dass sich **alle** quadrat-integrierbare Martingale in dieser Form darstellen lassen (natürlich nur, wenn $\mathbb{F}$ die natürliche Filtration von B ist).

Theorem 169. *Sei $(M)_{t\in[0,T]}$ ein quadrat-integrierbares Martingal bezüglich $\mathbb{F}$. Dann existiert ein adaptierter Prozess $(f_t)_{t\in[0,T]}$, so dass $f \in \mathcal{H}^2$ gilt und $\forall t \in [0,T]$ ist*

$$M_t = M_0 + \int_0^t f_s dB_s \qquad \mathbb{P} - f.s.$$

Beweis. Für den Beweis von Theorem 167 nehmen wir an, dass eine zulässige Handelsstrategie H existiert, die die Option repliziert. Deswegen soll natürlich $V_T = D_T$ gelten. Für den diskontierten Wert gilt

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_u\, dX_u \tag{170}$$

Da H eine zulässige Handelsstrategie ist gilt, schließen wir, dass das stochastische Integral sogar ein Martingal ist, und erhalten

$$V_t = \mathbb{E}_Q[V_T|\mathscr{F}_t].$$

Das ist natürlich gleichbedeutend mit Gleichung (168). Jede zulässige Handelsstrategie muss also diese Form haben. □

Hedging

Zur Berechnung der Absicherungsstrategie stützen wir uns auf

$$V_t = V_0 + \int_0^t H_t \, dX_t.$$

Es wird sich als nützlich erweisen, den Call in Abhängigkeit zum Aktienkurs zu schreiben, also als $C(t, S_t)$. Wir wissen bereits, dass diese Handelsstrategie replizierend ist, zu jeder Zeit gilt also $V_t = e^{-rt}C(t, S_t) = e^{-rt}C(t, e^{-rt}X_t) =: F(t, X_t)$ mit

$$F(t, x) = e^{-rt}C(t, e^{rt}x).$$

Mit der Itô -Formel folgt, dass

$$dV_t = \frac{\partial}{\partial t}F(t, X_t)\, dt + \frac{\partial}{\partial x}F(t, X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(t, X_t)\sigma^2 X_t^2 \, dt. \qquad (171)$$

Hierbei ist V unter Q ein Martingal. Ebenso X.

Damit müssen sich alle Terme mit dt in obiger Gleichung zu 0 addieren.

Also ist

$$dV_t = \frac{\partial}{\partial x}F(t, X_t)\, dX_t.$$

Nun ist

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t, x) = e^{-rt}e^{rt}\frac{\partial}{\partial S}C(t, e^{rt}x)$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\frac{\partial}{\partial x}F(t, X_t) = \frac{\partial}{\partial S}C(t, S_t).$$

Diese partielle Ableitung des Call-Preises wird **Delta** genannt,

$$\Delta_t := \frac{\partial}{\partial S}C(t, S_t) = \Phi(d_1). \qquad (172)$$

In der gewählten selbstfinanzierenden Handelsstrategie ist demnach der Aktienanteil H_t gleich Δ_t; zu jedem Zeitpunkt hält die Händlerin Δ_t Aktien.

Stochastische Differentialgleichungen

Nachdem wir nun die stochastische Integration auf einem sehr allgemeinen Level kennengelernt haben wird nun ein für die Anwendung sehr relevantes Gebiet gestreift: *Stochastische Differntialgleichungen* (SDEs - von stochastic differential equations). Wir konzentrieren uns zunächst auf den stetigen Fall.

Als Beispiel betrachten wir eine Brownschen Bewegung und den Prozess X gegeben durch $X_t = e^{W_t}$. Dann ist mit der Itô-Formel

$$X_t = X_0 + \int_0^t X_t dW_t + \frac{1}{2}\int_0^t X_t dt,$$

was man als stochastische Differentialgleichung interpretieren könnte in der Form

$$dX_t = X_t dW_t + \frac{1}{2} X_t dt.$$

Hierbei haben wir einen stochastischen Prozess gefunden, der diese SDE erfüllt, was – wie wir später sehen werden – eine so genannte *starke Lösung* ist.

Wir betrachten eine r-dimensional Brownsche Bewegung W und interessieren uns für die SDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 &= \xi \end{aligned} \tag{173}$$

wobei der *Drift* $b(t,x) = (b_i(t,x))_{1\le i\le d}$ und die *Dispersions-Matrix* (auch Volatilität) $\sigma(t,x) = (\sigma_{ij}(t,x))_{1\le i\le d, 1\le j\le r}$ durch Borel-messbare Funktionen $b_i(t,x)$ und $\sigma_{ij}(t,x)$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$ jeweils von $[0,\infty) \times \mathbb{R}^d$ nach $\mathbb{R}$ gegeben seien.

Der stetige Prozess X soll in einem gewissen Sinn die Lösung der Gleichung (173) sein. Diese Gleichung verstehen wir komponentenweise:

$$dX_t^i = b_i(t, X_t)dt + \sum_{j=1}^r \sigma_{ij}(t, X_t) dW_t^j, \qquad 1 \le i \le d. \tag{174}$$

Zu der Dispersionsmatrix assoziieren wir die *Diffusions-Matrix*

$$a_{ik}(t,x) := \sum_{j=1}^t \sigma_{ij}(t,x)\sigma_{kj}(t,x), \quad 1 \le i,k \le d.$$

Die starke Lösung

Für eine starke Lösung wählen wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ mit einer r-dimensionalen Brownschen Bewegung W. Mit W assozieren wir die von W erzeugte Filtration $\mathbb{F}^W$. Außerdem möchten wir, dass unsere Lösung von einem zufälligen Anfangswert ξ starten kann, wir nehmen also an das auf unserem Wahrscheinlichkeitsraum auch eine solche d-dimensionale ZV existiert, welche unabhängig von W ist[29].

Hieraus erzeugen wir die links-stetige Filtration $\mathbb{G} = (\mathscr{G}_t)_{t\geq 0}$ gegeben durch

$$\mathscr{G}_t := \sigma(\xi) \vee \mathscr{F}_t^W.$$

Die Konvention $\sigma(\xi) \vee \mathscr{F}_t^W$ steht für $\sigma(\xi, W_s \colon 0 \leq s \leq t)$ - also für die von ξ und $\mathscr{F}_t^W$ erzeugte σ-Algebra. Dazu nehmen wir die Nullmengen

$$\mathscr{N} := \{N \subset \Omega \colon \exists G \in \mathscr{G}_\infty \text{ with } N \subseteq G \text{ and } P(G) = 0\}$$

und definieren die vervollständigte Filtration

$$\mathscr{F}_t := \sigma(G_t \cup \mathscr{N}), \qquad 0 \leq t < \infty$$

mit $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\cup_{t\geq 0}\mathscr{F}_t)$. Damit erhalten wir den filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}_\infty, \mathbb{F}, P)$ der die üblichen Bedingungen erfüllt.

Definition 175. Eine *starke Lösung* der SDE (173) ist ein stetiger Prozess X, so dass

(i) X ist $\mathbb{F}$-adaptiert,

(ii) $P(X_0 = \xi) = 1$,

(iii) es gilt für alle $0 \leq t < \infty$, $1 \leq i \leq d$, $1 \leq j \leq r$, dass

$$\int_0^t \big(b_i(s, X_s) + \sigma_{ij}^2(s, X_s)\big) ds < \infty$$

f.s. und

(iv) die erste Gleichung in (173) ist f.s. erfüllt.

Während alle Bedingungen natürlich sind, ist gerade die erste Bedingung eine Schlüsselbedingung - sie sorgt dafür, dass X nicht in die Zukunft blicken kann und somit Bewegungen von W antizipieren kann.

[29] Wir fordern: ξ ist unabhängig von $\mathscr{F}_\infty^W$.

Definition 176. Falls für je zwei starke Lösungen X und X' von (173) gilt, dass

$$P(X_t = X'_t,\ 0 \leq t < \infty) = 1,$$

so gilt *starke Eindeutigkeit* für die (173).

Genau genommen ist starke Eindeutigkeit eine Bedingung an das Paar (b, σ) und wir werden im Folgenden versuchen, hinreichende Bedingungen zu entwickeln.

Beispiel 177 (Starke Eindeutigkeit)**.** Betrachten wir $r = d = 1$ und die SDE

$$dX_t = b(t, X_t)dt + dW_t,$$

mit einer beschränkten, in x fallenden Funktion b, so gilt starke Eindeutigkeit. In der Tat, wir können $\Delta_t = X_t - X'_t$ betrachten, so dass nach der Itô-Formel

$$\Delta_t^2 = 2\int_0^t (X_s - X'_s) \cdot \big(b(s, X_s) - b(s, X'_s)\big)ds \leq 0, \qquad 0 \leq t < \infty$$

P-f.s. und somit ist $\Delta = 0$.

Eindeutigkeit

Ist $\sigma = 0$, so reduziert sich die Fragestellung auf gewöhnliche Integralgleichungen der Form

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds.$$

Nimmt man an, dass das Vektorfeld $b(t, x)$ eine lokale Lipschitz-Annahme erfüllt sowie beschränkt auf kompakten Teilmengen von $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ ist, so erhält man mit den Picard-Lindelöf Iterationen $X_t^0 = X_0$ und

$$X_t^{n+1} = X_0 + \int_0^t b(s, X_s^n)ds, \qquad n \geq 0$$

eine Folge die gegen die Lösung von (173) konvergiert. Darüber hinaus ist die Lösung eindeutig.

Beispiel 178 (Keine Eindeutigkeit)**.** Ohne eine solche Bedingung muss die Lösung nicht mehr eindeutig sein. Klassisch ist das Beispiel[30]

[30] Für $\alpha \geq 1$ ist die einzige Lösung hingegen $X = 0$.

$$X_t = \int_0^t |X_s|^\alpha ds,$$

für $0 < \alpha < 1$. Für jedes $0 \le s < \infty$ löst $X = X(s)$ mit

$$X_t = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le s, \\ \left(\frac{t-s}{\beta}\right)^\beta & s \le t < \infty \end{cases}$$

mit $\beta = (1-\alpha)^{-1}$ die Gleichung.

Kyioshi Itô hat als erster die Lösungstheorie unter Lipschitz-Bedingungen entwickelt, wie wir sie nun vorstellen. Noch einmal präzise: Wir sagen $b(t,x)$ und $\sigma(t,x)$ sind lokal Lipschitz-stetig in x falls für jedes $n \ge 1$ eine Konstante $K_n > 0$ existiert, so dass für alle $t \ge 0$, $\| x \| \le n$ und $\| y \| \le n$ gilt, dass

$$\| b(t,x) - b(t,y) \| + \| \sigma(t,x) - \sigma(t,y) \| \le K_n \| x - y \| . \qquad (179)$$

Theorem 180. *Sind die Koeffizienten b und σ lokal Lipschitz-stetig, so gilt starke Eindeutigkeit für die SDE* (173).

Zentrales Hilfsmittel für den Beweis unter Lipschitzbedingungen ist die berühmte Gronwall-Ungleichung.

Aufgabe 17 (Gronwall-Ungleichung)**.** Sei g eine stetige Funktion, $\beta \ge 0$, α eine integrierbare Funktion und gelte

$$0 \le g(t) \le \alpha(t) + \beta \cdot \int_0^t g(s) ds.$$

Dann gilt, dass

$$g(t) \le \alpha(t) + \beta \cdot \int_0^t \alpha(s) e^{\beta(t-s)} ds\,.$$

Beweis der Gronwall-Ungleichung folgt über den Hauptsatz der Differential und Integral-Rechnung. Sei α konstant aber β eine Funktion, so dass $0 \le g(t) \le \alpha + \int_0^t \beta(s) g(s) ds$..

(i) Definiere $\phi = \alpha(t) + \beta \cdot \int_0^t g(s) ds$. Dann ist $g \le \phi$
(ii) Ableiten: wir haben $\phi' = \beta g$
(iii) Dann ist aber auch $\phi' \le \beta\phi$
(iv) und somit $\frac{\phi'}{\phi} \le \beta$ und damit auch
$$\int_0^t \frac{\phi'}{\phi} \le \int_0^t \beta$$
(v) Die linke Seite ist $\ln|\phi(t)| - \ln|\phi(0)| = \ln|\phi(t)| - \ln|\alpha|$ und aus $g \le \phi$ folgt die Behauptung

Beweis. Wir betrachten zwei starke Lösungen X und X'. Zur Lokalisierung verwenden wir die Zeiten

$$T_n := \inf\{t \ge 0 \colon \|X_t\| \ge n\}, \qquad T_n' := \inf\{t \ge 0 \colon \|X_t'\| \ge n\}$$

und setzen $S_n := T_n \wedge T_n'$.

Weiterhin ist

$$X_{t\wedge S_n} - X'_{t\wedge S_n} = \int_0^{t\wedge S_n} \big(b(s,X_s) - b(s,X_s')\big) ds + \int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s')\big) dW_s.$$

Wie in Beispiel (178) schauen wir uns die Quadrate an und versuchen zu erreichen, dass diese verschwinden. Zunächst einmal ist

Hier verwenden wir

$$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2$$

$$E\Big[\Big\| \int_0^{t\wedge S_n} X_{t\wedge S_n} - X'_{t\wedge S_n} \Big\|^2\Big] \le 2E\Big[\Big\| \int_0^{t\wedge S_n} \big(b(s,X_s) - b(s,X_s')\big) ds \Big\|^2\Big] + 2E\Big[\Big\| \int_0^{t\wedge S_n} \big(\sigma(s,X_s) - \sigma(s,X_s')\big) dW_s \Big\|^2\Big].$$

Wir betrachten die Terme getrennt. Für den zweiten Summanden verwenden wir die Itô Isometrie, so dass zusammen mit der Lipschitz-Annahme un der Jensenschen Ungleichung

$$
\begin{aligned}
E\left[\left\| \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \left(\sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, X_s'^{S_n})\right) dW_s \right\|^2\right] &= E\left[\left\| \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \left(\sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, X_s'^{S_n})\right) ds \right\|^2\right] \\
&\le E\left[t \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \left\| \left(\sigma(s, X_s^{S_n}) - \sigma(s, X_s'^{S_n})\right) \right\|^2 ds\right] \\
&\le K_n^2 \cdot \int_0^t E\left[\mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \|X_s - X_s'\|^2\right] ds \\
&\le K_n^2 \cdot \int_0^t E\left[\|X_s - X_s'\|^2\right] ds.
\end{aligned}
$$

Mit der Jensenschen Ungleichung. Diese gilt für W-Maße, wir müssen also normieren

$$
\left\| \int_0^t f(s) ds \right\|^2 = t^2 \left\| \int_0^t \frac{1}{t} f(s) ds \right\|^2 \le t^2 \int_0^t \frac{1}{t} \|f(s)\|^2 ds = t \int_0^t \|f(s)\|^2 ds
$$

Schauen wir uns den zweiten Teil an. Für diesen gilt, wieder mit der Jensenschen Ungleichung,

$$
\begin{aligned}
E\left[\left\| \int_0^t \mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \left(b(s, X_s^{S_n}) - b(s, X_s'^{S_n})\right) ds \right\|^2\right] &\le t \cdot \int_0^t E\left[\mathbb{1}_{\{s \le S_n\}} \left\| \left(b(s, X_s^{S_n}) - b(s, X_s'^{S_n})\right) \right\|^2\right] ds \\
&\le t \cdot \int_0^t K_n^2 \cdot E\left[\|X_s - X_s'\|^2\right].
\end{aligned}
$$

Nun wenden wir die Gronwall-Ungleichung mit $g(t) = E[\|X_s - X_s'\|^2]$ an. Zunächst ist

$$
g(t) \le 2 \cdot T \cdot K_n^2 \cdot \int_0^t g(s) ds \,,\; 0 \le t \le T
$$

und somit $g \equiv 0$. Also ist X eine Modifikation von X' auf $[0, T]$. Da T beliebig war, erhalten wir starke Eindeutigkeit. □

Existenz

Bereits für gewöhnliche Differentialgleichungen reicht eine Lipschitz-Bedingung nicht für Existenz, da die Lösungen explodieren können, wie folgendes Beispiel zeigt.

Bemerkung 181 (Explosionen von ODEs)**.** Die gewöhnliche Differentialgleichung

$$
X_t = 1 + \int_0^t X_s^2 ds
$$

hat eindeutige (da Lipschitz!) Lösung $\frac{1}{1-t}$ auf $[0, 1)$. Allerdings explodiert diese für $t \to 1$.

Um uns von dem lokalen Lipschitz-Bedingungen abzugrenzen, sagen wir, eine Funktion ist (global) Lipschitz, falls die Lipschitz-Bedingung für alle (t, x, y) und einer festen Konstante K gilt, d.h.

$$
\|b(t, x) - b(t, y)\| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\| \le K\|x - y\|.
$$

Theorem 182 (Existenz). *Die Funktionen b und σ seinen global Lipschitz, und es gelte*

$$\|b(t,x)\|^2 + \|\sigma(t,x)\|^2 \leq K^2\big(1+\|x\|^2\big) \tag{183}$$

sowie $E\big[\|\xi\|^2\big] < \infty$. Dann existiert eine starke Lösung.

Die Gleichung (183) verlangt, dass höchstens lineares Wachstum in b und σ vorliegt, man nennt sie deswegen auch linear growth condition.

Ein wichtiger Teil ist die BDG-Ungleichung.

Bemerkung 184 (Burkhölder-Davis-Gundy Ungleichung). Für alle $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$, alle Stoppzeiten T gilt die BDG

$$E\big[(\sup_{[0,T]}\|M\|)^{2m}\big] \leq K \cdot E\big[\{M\}^m_T\big]$$

(sieh dazu almost sure blog)

Die Idee des Beweises ist, eine Modifikation des Picard-Lindelöf-Verfahrens zu verwenden.

Beweis. Wir setzen $X^{(0)} \equiv \xi$ und definieren

$$X^{(k+1)}_t = \xi \int_0^t b(s, X^{(k)}_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X^{(k)}_s)dW_s\,, \quad t \geq 0$$

Betrachten wir $X^{(k+1)} - X^{(k)} = B + M$ mit

$$B = \int b(X^{(k)}) - b(X^{(k-1)})ds$$

und M analog. Wir verwenden die *Burkhölder-Davis-Gundy Ungleichung*. Für $M \in \mathcal{M}^{c,loc}$ gilt für $m \geq 1$

$$\begin{aligned}
&E\big[(\sup_{[0,T]}\|M\|)^{2m}\big] \leq K \cdot E\big[\{M\}^m_T\big] \\
\Longrightarrow \quad & E\big[\|\sup_{[0,T]} M\|^2\big] \leq K \cdot E\Big[\int_0^T \|\sigma(s, X^{(k)}_s) - \sigma(s, X^{(k-1)}_s)\|^2 ds\Big] \\
&\leq K' \cdot E\Big[\int_0^T \|X^{(k)}_s - X^{(k-1)}_s\|^2 ds\Big]
\end{aligned}$$

Wir im vorigen Theorem

$$E\big[\|B_T\|^2\big] \leq K'' \cdot \int_0^T E\big[\|X^{(k)}_s - X^{(k-1)}_s\|^2\big]ds$$

so dass

$$\mathbb{E}\big[\|\sup_{[0,T]} X^{k+1}_s - X^{(k)}_s\|^2\big] \leq \widetilde{K} \int_0^T E\big[\|X^{(k)}_s - X^{(k-1)}_s\|^2\big]ds$$

Fortsetzung am 27.01:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\big[\| \sup_{[0,T]} X_s^{k+1} - X_s^{(k)} \|^2\big] &\leq K'' \int_0^t \mathbb{E}\big[\| X_s^k - X_s^{(k-1)} \|^2\big] ds \\
&\leq K'' \int_0^t \max_{[0,s]} \mathbb{E}\big[\| X_n^{(k)} - X_n^{(k-1)} \|^2\big] ds \\
&\leq K'' \int_0^t \mathbb{E}\big[\max_{[0,s]} \| X_s^{(k)} - X_s^{(k-1)} \|^2\big] ds \\
&\leq (K'')^2 \int_0^t \int_0^{t_1} \mathbb{E}\big[\| X_{t_2}^{(k-1)} - X_{t_2}^{(k-2)} \|^2\big] dt_2 dt_1 \\
&\vdots \\
&\leq (K'')^k \int_0^t \cdots \int_0^{t_k} \mathbb{E}\big[\| X_{t_k}^{(1)} - \xi \|^2\big] dt_k \cdots dt_1 \\
&\leq \frac{(K''t)^k}{k!} C^*
\end{aligned}
$$

mit $C^* := \max_{[0,t]} \mathbb{E}\big[\| X_{t_k}^{(1)} - \xi \|^2\big]$.
Mit der Tschebyscheff-Ungleichung folgt

$$
P(\max_{[0,T]} \| X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} \| > \frac{1}{2^{k+1}}) \leq 4 \cdot C^* \frac{(4K''T)^k}{k!}
$$

Mit dem Lemma von Borel-Cantelli folgt auf einer Menge Ω^* mit Wahrscheinlichkeit 1, dass

$$
\max_{[0,T]} \| X_t^{(k+1)} - X_t^{(k)} \| \leq \frac{1}{2^{k+1}} \qquad k \geq N(w),\ w \in \Omega^*
$$

und damit die Konvergenz von stetigen Prozessen bezüglich der sup-Norm, also die Existenz eines stetigen Grenzprozesses. $\square$

Schwache Lösungen

Wir betrachten weiterhin eine r-dimensional Brownsche Bewegung W und interessieren uns für die SDE

$$\begin{aligned} dX_t &= b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \\ X_0 &= \xi \end{aligned} \tag{185}$$

Im Gegensatz zur starken Lösung können wir uns bei der schwachen Lösung den Wahrscheinlichkeitsraum und die Brownsche Bewegung aussuchen. Damit erhält man wesentlich mehr Freiheiten und einen allgemeineren Lösungsbegriff.

Definition 186. Eine *schwache Lösung* von (185) ist ein Tripel $\big((X, W), (\Omega, \mathscr{F}, P), \mathbb{F}\big)$ so dass $(\Omega, \mathscr{F}, P, \mathbb{F})$ eine stochastische Basis ist, bezüglich der W eine r-dimensionale Standard-Brownsche Bewegung und X ein adaptierter stochastischer Prozess ist, so dass

(i) $P(X_0 = \xi) = 1$,

(ii) $P\Big(\int_0^t |b_i(s, X_s)| + \sigma_{ij}^2(s, X_s)ds < \infty\Big) = 1$ für alle $1 \le i, j \le d$ und $t \ge 0$

(iii) es gilt, dass

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dWs, \qquad t \ge 0.$$

Definition 187. Gilt für je zwei Lösungen $\big((X, W), (\Omega, \mathscr{F}, P), \mathbb{F}\big)$ und $\big((\widetilde{X}, W), (\Omega, \mathscr{F}, P), \widetilde{\mathbb{F}}\big)$ und gilt

(i) $P(\widetilde{X}_0 = X_0) = 1$

(ii) $P(\widetilde{X}_t = X_t\,,\ t \ge 0) = 1$

so sagen wir, dass *pfadweise Eindeutigkeit* für (185) gilt.

Die Resultate zur starken Eindeutigkeit implizieren pfadweise Eindeutigkeit. (In der Tat, die Beweise machen keinen Gebrauch von der speziellen Filtration.)

Theorem 188. *Seien $b(t, x) = b(x)$ und $\sigma(t, x) = \sigma(x)$ und beschränkt sowie stetig. Dann gibt es zu jeder Anfangsverteilung ν mit*

$$\int \|X\|^{2m}\nu(dx) < \infty\,, \qquad \text{für ein } m > 1$$

eine schwache Lösung (siehe Karatzas/Shreve 5.4.22 und 5.4.20).

Im eindimensionalen Fall kann man Existenz und Eindeutigkeit sehr genau charakterisieren (das ist die Engelbert/Schmidt - Theorie, siehe Karatzas/Shreve, Kapitel 5.5)

Lineare Differentialgleichungen

Ganz besonders schön ist die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Hier werden wir stets mit Gauß-Prozessen arbeiten, da die Normalverteilung unter linearen Transformationen erhalten bleibt.

Wir betrachten also im Folgenden

$$\begin{aligned} dX_t &= \Big(A(t)X_t + a(t)\Big)dt + \sigma(t)dW_t, \qquad 0 \le t < \infty, \\ X_0 &= \xi \end{aligned} \tag{189}$$

mit einer r-dimensionalen Brownschen Bewegung unabhängig von ξ. Die $(d \times d)$, $(d \times 1)$, $(d \times r)$-dimensionalen Matrizen-wertigen Funktionen A, a und σ seien messbar und lokal beschränkt (und nicht zufällig).

Der deterministische Fall

Schauen wir uns zunächst den deterministischen Fall an (siehe zB. [31]). Die lineare, inhomogene Gleichung

[31]

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + a(t) \tag{190}$$

hat für alle Anfangsbedingungen eine Lösungen. Sie sind stets geben als Summe einer Lösung der inhomogenen Gleichung plus einer Lösung der homogenen Gleichung. Die homogene Gleichung

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) \tag{191}$$

lässt sich über die Fundementallösung der Matrix-Differentialgleichung[32]

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t) \tag{192}$$

charakterisieren, welche auch wieder existiert und eindeutig bestimmt ist: Jedes $\Phi(t)\lambda$ löst (191) und somit lassen sich alle Lösungen

[32] Im d-dimensionalen gibt es einige Schwierigkeiten, da das Matrix Produkt nicht kommutiert. Finden Sie ein Beispiel, so dass

$$\exp(A + B) \neq \exp(A)\exp(B).$$

durch

$$\xi(t) = \Phi(t)\Big[\xi(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds\Big] \tag{193}$$

darstellen, wie man leicht überprüft.

Gilt allerdings $B = \int A(t)dt$, so kann an die Lösung auch über das Matrix-Exponential darstellen, da dann

$$\dot{\exp}(B(t)) = A(t)\,\exp(B(t))$$

gilt, und $\xi = \exp(B)$ die Fundamentalgleichung löst. Andernfalls muss man die Fundamentallösung numerisch oder durch eine *Magnusreihe* approximieren.

Die allgemeine lineare SDE

Hierdurch können wir auch die lineare SDE (197) lösen: In der Tat, mit der Itô-formel überprpüft man leicht, dass

$$X_t = \Phi(t)\left[X_0 + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds + \int_0^t \Phi^{-1}(s)\sigma(s)dW_s\right], \quad 0 \le t < \infty. \tag{194}$$

Nehmen wir an, dass X_0 normalverteilt ist. Da das zweite Integral ein lineares Funktional eines Gaußprozesses ist, ist es normalverteilt. Das erste Integral ist deterministisch, und somit ist X wieder ein Gaußprozess. (Das zeigt man z.B. indem man die Laplacetransformierte mit Hilfe der Itô-formel berechnet).

Bestimmt man demnach Erwartungswertfunktion und Kovarianzfunktion von X, so kann man den Prozess hierdurch genau charakterisieren. Das ist Gegenstand der folgenden Aufgabe.

Aufgabe 18. Definieren wir Erwartungswert- und Kovarianzfunktion von X durch

$$\begin{aligned} m(t) &= E[X_t], \\ \rho(s,t) &= E[(X_s - m(s))(X_t - m(t))^\top] \end{aligned}$$

so gilt unter (194), dass

$$\begin{aligned} m(t) &= \Phi(t)\Big[m(0) + \int_0^t \Phi^{-1}(s)a(s)ds\Big], \\ \rho(s,t) &= \Phi(s)\left[\rho(0,0) + \int_0^{s\wedge t} \Phi^{-1}(u)\sigma(u)(\Phi^{-1}(u)\sigma(u))^\top du\right]\Phi^\top(t), \end{aligned}$$

$0 \le s,t < \infty$. Man erhält insbesonder dass der Mittelwert und die Varianz $V(t) = \rho(t,t)$ die linearen Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{m}(t) &= A(t)m(t) + a(t), \\ \dot{V}(t) &= A(t)V(t) + V(t)A^\top(t) + \sigma(t)\sigma^T(t) \end{aligned}$$

erfüllen.

Beispiel 195 (Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess)**.** Das einfachste Beispiel einer linearen SDE ist der Ornstein-Uhlenbeck Proezess. Wir wählen $r = d = 1$ und suchen die Lösung von

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \sigma dW_t,$$

mit $\alpha, \sigma > 0$. Diese Gleichung wurde 1930 von den niederländischen Physikern Leonard Orstein und Geroge Uhlenbeck untersucht. Bereits 1908 hatte der Physiker Paul Langevin eine Gleichung für ein Teilchen in einer Flüssigkeit hergeleitet, die von einem OU-Prozess gelöst wird.

Nach unserer Lösungsmethode ist

$$X_t = X_0 + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$$

eine Lösung, wie man leicht auch noch einmal mit der Itô-Formel verifiziert. Ist X_0 normalverteilt mit verschwindendem Mittelwert und Varianz $\frac{\sigma^2}{2\alpha}$, so ist X ein stationärer Gaußprozess mit Kovarianzfunktion $\rho(s,t) = \sigma^2/2\alpha e^{-\alpha|t-s|}$.

Beispiel 196 (Brownsche Brücke)**.** Für die Brownsche Brücke $B_t = W_t - t/T W_T$ erhält man auch eine adaptierte Darstellung durch eine SDE,

$$dX_t = \frac{b - X_t}{T - t} dt + dW_t, \qquad 0 \le t < T,\ X_0 = a,$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Wir erhalten als Lösung

$$X_t = a\left(1 - \frac{t}{T}\right) + \frac{b}{T} t + (T - t) \int_0^t \frac{dW_s}{T - s}.$$

Man berechnet leicht die Kovarianzfunktion unter $a = b = 0$

$$\rho(s,t) = (s \wedge t) - \frac{st}{T},$$

die somit die Brownsche Brücke von 0 nach 0 auf $[0, T]$ charakterisiert. (Standard Brownsche Brücke).

Der eindimensionale Fall

Als letztes soll der eindimensional Fall komplett gelöst werden. Hierzu betrachten wir $d = 1$ aber allgemeines r und die Gleichung

$$dX_t = \big(A(t)X_t + a(t)\big)dt + \big(\Sigma(t)^\top X_t + \sigma(t)^\top\big)dW_t. \tag{197}$$

Hierbei nehmen lediglich wir an, dass die Funktionen A, a (mit Werten in $\mathbb{R}$) und Σ, σ (mit Werten in $\mathbb{R}^r$) $\mathbb{F}$-adaptiert, messbar und (f.s.) lokal beschränkt sind.

Wir setzen

$$\zeta_t = \int_0^t \Sigma(s)^\top dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Sigma(s)^\top \Sigma(s) ds,$$
$$Z_t = \exp\Big(\int_0^t A(s)ds + \zeta_t\Big).$$

Satz 198. *Dann ist die eindeutige Lösung von Gleichung* (197) *gegeben durch*

$$X_t = Z_t\Big[X_0 + \int_0^t \frac{1}{Z_s}(a(s) - \Sigma(s)^\top \sigma(s))ds + \int_0^t \frac{1}{Z_s}\Sigma(s)^\top dW_s\Big].$$

Aufgabe 19. Zeigen Sie, dass für den Fall von konstanten Koeffizienten und unter $2A < \Sigma^\top \Sigma$ gilt, dass $\lim_{t\to\infty} X_t \to 0$ f.s.

Markov Prozesse

Einführung

Markov Prozesse sind ein wichtiges und vielfältiges Instrument. Typischerweise werden in der Literatur Markov Prozesse in einer großen Allgemeinheit studiert, insbesondere kann man deutlich allgemeinere Zustandsräume als den $\mathbb{R}^n$ betrachten. Allerdings nimmt man, mit wenigen Ausnahmen, in Kauf, auf dem $\mathbb{R}^n$ nicht ganz die Allgemeinheit von Semimartingalen zu erreichen, siehe etwa [33]. Die für die Vorlesung relevante Literatur ist [34] und [35].

Wir betrachten einen Meßraum $(E, \mathscr{E})$ und einen stochastischen Prozess X mit Werten in E. Um Vorhersagen zu treffen sind die Wahrscheinlichkeiten

$$P\big(X_t \in A \mid \sigma(X_u\colon u \leq s)\big) \tag{199}$$

mit $A \in \mathscr{E}$ zur Zeit $s \leq t$ nötig. Hängen diese Wahrscheinlichkeiten nur von X_s ab und nicht von der gesamten Vergangenheit, so wird der Prozess *Markovsch* genannt (oder auch schlicht ein Markov-Prozess). Wir kennen bereits einige Beispiele: Die Brownsche Bewegung, die geometrische Brownsche Bewegung, usw. Alle Prozesse mit unabhängigen Zuwächsen sind Markov-Prozesse, aber auch Lösungen von SDEs wenn diese von Prozessen mit unabhängigen Zuwächsen getrieben werden.

Für einen Markov-Prozess erhalten wir für die Übergangswahrscheinlichkeit in Gleichung (199), dass man sie mit Hilfe einer Abbilung $X \mapsto G_{s,t}(X, A)$ schreiben kann als als

$$P(X_t \in A \mid \sigma\big((X_u\colon u \leq s)\big) = G(X_s, A).$$

Eine solche Abbildung nennt man einen Kern - er erfüllt die folgenden Eigenschaften.

[33] E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, and M. Sharpe. Semimartingales and Markov processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 54(2):161–219, 1980

[34] D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 3rd ed. p. cm. edition, 2005

[35] S. Ethier and T. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, New York, 1986

Definition 200. Ein *Kern* N auf E ist eine Abbildung von $E \times \mathscr{E}$ in $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ so, dass

(i) für jedes $x \in E$ ist die Abbildung $A \mapsto N(x, A)$ ein Maß auf E,

(ii) für jedes $A \in \mathscr{E}$ ist die Abbildung $x \mapsto N(x, A)$ messbar.

Ein Kern heißt *Übergangswahrscheinlichkeit* falls für alle $x \in E$,

$$N(x, E) = 1.$$

Für meßbares $f \geq 0$ (oder beschränktes) definieren wir die Funktion Nf durch

$$Nf(x) := \int f(y) N(x, dy), \qquad x \in E.$$

Aufgabe 20 (Verkettung). Nf ist wieder meßbar, und

$$MN(X, A) := \int_E N(y, A) M(X, dy)$$

ist wieder ein Kern.

In diskreter Zeit kann man zu einer Übergangswahrscheinlichkeit N einen Markov-Prozess wie folgt definieren: Wir starten in x an 0 (dies kann auch nach einer Verteilung ausgewertet werden). Nach der Wahrscheinlichket $N(x, \cdot)$ würfeln wir X_1 aus. Dann würfeln wir X_2 nach $N(X_1, \cdot)$ aus usw. Dieses Prozedere führt zu einem homogenen Markov-Prozess in diskreter Zeit. Inhomogenitäten entstehen dann, wenn man unterschiedliche Kerne benutzt.

Für diesen allgemeineren Fall bezeichnen wir die Übergangswahrscheinlichkeiten mit einer Familie von Kernen: Angenommen, dass

$$P\big(X_t \in A \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big) = P_{s,t}(X_s, A) \qquad P\text{-fast sicher}$$

Mit dem Monotonen Klassen Theorem 19 erhalten wir aus

$$E\big[\mathbb{1}_{X_t \in A} \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big] = \int_A P_{s,t}(X_s, dy)$$

dass für meßbares $f \geq 0$ gilt:

$$E\big[f(X_t) \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big] = \int f(y) P_{s,t}(X_s, dy) = P_{s,t} f(X_s)$$

Betrachten wir $s < t < v$, dann folgt

$$\begin{aligned} E\big[f(X_v) \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big] &= E\big[E\big[f(X_v) \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big] \mid \sigma(X_u \colon u \leq s)\big] \\ &= \int P_{t,v} f(y) P_{s,t}(X_s, dy) = P_{s,t} P_{t,v} f(X_s) \end{aligned} \tag{201}$$

wobei in der ersten Zeile $E\big[f(X_v) \mid \sigma(X_u\colon u \le s)\big] = P_{t,v}f(X_t) =: g(X_t)$.

Die Gleichungen in (201) nennt man *Chapman-Kolmogorov-Gleichungen*.

Definition 202. Eine *Übergangsfunktion* P ist eine Familie $P = (P_{s,t})_{s<t}$ von Übergangswahrscheinlichkeiten auf $(E, \mathscr{E})$ so dass

$$\int P_{t,v}(y, A) P_{s,t}(x, dy) = P_{s,v}(x, A)$$

für alle $s < t < v$, für alle $x \in E$ und alle $A \in \mathscr{E}$ gilt. Sie heißt *homogen*, falls sie von s und t nur durch $s - t$ abhängt, also

$$P_{s,s+h} = P_{0,h} \qquad \forall s, h \ge 0\,.$$

Dann erhält man aus (201), dass

$$P_{t+v} = P_t P_v$$

was bedeutet, dass die homogenen Übergangsfunktionen eine Halbgruppe bilden.

Die Markov-Eigenschaft

Definition 203. Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein adaptierter Prozess X heißt *Markovprozess*, falls eine Übergangsfunktion P existiert, so dass

$$E[f(X_t) \mid \mathscr{F}_s] = P_{s,t} f(X_s) \qquad P\text{-fast sicher}$$

für alle meßbaren Funktionen $f \ge 0$ und alle $0 \le s < t$. X heißt *homogen*, falls P homogen ist und $P(X_0 \in \cdot)$ heißt *Anfansverteilung* von X.

Oft verwendet man in dieser Definition die von X erzeugte Filtration $\mathscr{F}^X$, allerdings wird es manchmal nützlich sein eine allgemeinere Definition zu betrachten, etwa wenn man für Semimartingale die usual conditions erfüllen möchte.

Beispiel 204 (Markov-Kette)**.** Ist E höchstens abzählbar, so heißt der Markovprozess X *Markov-Kette*. Besonders einfach ist der Fall $E = \{1, 2, \dots, n\}$. Ist der Prozess in diskreter Zeit, also $(X_n)_{n \ge 1}$, so ist die Übergangsfunktion P durch die Matrizen

$$\big(P_{t,t+1}(i,j)\big)_{i,j \in \{1,\dots,n\}}$$

mit

$$P_{t,t+1}(i,j) = P_{t,t+1}(i,\{j\})$$

gegeben. Ist X sogar homogen, so genügt die Matrix $\big(P_{0,1}(i,j)\big)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$.

Starke Markoveigenschaft

Wir haben bei Semimartingalen gesehen, dass man durch Lokalisierung, also durch geeignetes Stoppen Prozesse ziemlich verändern kann. Aus diesem Grund unterscheidet man starke und schwache Markov-Eigenschaft.

Definition 205. Ein Markov-Prozess X mit Übergangsfunktion $(P_{s,t})$ heißt *starker Markov-Prozess*, falls

$$E\big[f(X_{S+t}) \mid \mathscr{F}_S\big] = P_{S,S+t}f(X_S) \qquad P\text{-fast sicher} \tag{206}$$

für alle Stoppzeiten $0 \le S < \infty$ und $t \ge 0$.

Wenn S nur abzählbar viele Werte annimmt, so erfüllt jeder Markov-Prozess die Gleichung (206). Stärkere Regularität impliziert dass sich die Markov-Eigenschaft auch auf Stoppzeiten überträgt, wie folgender Satz zeigt.

Satz 207. *Ist X ein Markov-Prozess mit càdlàg Pfaden und gilt für alle $s,t \ge 0$ und $f \in C_b$, dass*

(i) $s \mapsto P_{s,s+t}f$ *ist stetig*

(ii) $x \mapsto P_{s,s+t}f(x)$ *ist stetig*

so ist X ein starker Markov-Prozess.

Beweis. Zunächst ist X progressiv messbar (adaptiert und càdlàg). Für eine endliche Stoppzeit S finden wir eine Folge (S_n) von Stoppzeiten mit abzählbar vielen Werten, so dass $S_n \downarrow S$ konvergiert (fast sicher). Aus der Stetigkeit (i) folgt

$$X_{S_n} \to X_S \qquad P\text{-fast sicher (càd).}$$

Durch die Approximation durch Stoppzeiten mit abzählbar vielen

Werten erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} E\big[f(X_{S+t}) \mid \mathscr{F}_S\big] &= \lim_{n\to\infty} E\big[f(X_{S_n+t}) \mid \mathscr{F}_S\big] \\ &= \lim_{n\to\infty} E\big[E\big[f(X_{S_n+t}) \mid \mathscr{F}_{S_n}\big] \mid \mathscr{F}_S\big] \\ &\overset{\text{(i),(ii)}}{=} E[P_{S,S+t}f(X_S) \mid \mathscr{F}_S] = P_{S,S+t}f(X_S) \end{aligned}$$

wobei $E\big[f(X_{S_n+t}) \mid \mathscr{F}_{S_n}\big] = P_{S_n,S_n+t}f(X_{S_n})$. □

Beispiel 208 (Ein Markov Prozess, der nicht stark Markovsch ist)**.** Sei $T \sim Exp(1)$ und $X_t = (t-T)^+$. Die kanonische Filtration ist nicht rechtsstetig. Wir betrachten

$$\mathscr{F}_t = \sigma(X_s \colon 0 \le s \le t) \wedge N_0$$

wobei N_0 alle P-Nullmengen sind ($P(T = t)$), dann folgt dass für $f \in C_b$ gilt

$$E[f(X_{s+t}) \mid \mathscr{F}_s] = \begin{cases} E\big[f((t-s-T)^+)\big]\,, & X_s = 0 \\ f(X_s + t) & X_s > 0\,. \end{cases}$$

Wir definieren $S = \inf\{t \ge 0 \colon X_t > 0\}$ und es folgt $S = T$. S ist $\mathbb{F}$-Stoppzeit, denn

$$\{S \le t\} = \underbrace{\{S < t\}}_{\in \mathscr{F}_t} \cup \underbrace{\{S = t\}}_{\in N_0} \quad \in \mathscr{F}_t.$$

Nun ist

$$E[f(X_S + t) \mid \mathscr{F}_S] = E[f(X_T + t) \mid \mathscr{F}_S] = f(t)\,.$$

Das ist nicht immer gleich

$$P_{S,S+t}f(X_S) = P_{S,S+t}f(0),$$

und somit ist X nicht stark Markovsch.

Etwas Halbgruppentheorie

Wie ist der Zusammenhang zwischen Markov-Prozessen und Halbgruppen ? Für nicht homogene Markov Prozesse werden wir eine allgemeinere Theorie benötigen, für homogene Markov-Prozesse allerdings lässt sich ein sehr fruchtbarer Zusammenhang zu Halbgruppen ableiten.

Bemerkung 209 (Der Raum der stetigen Funktionen)**.** Ist E ein topologischer Raum, so ist $(C_b(E), \|\cdot\|_\infty)$ wieder ein Banachraum. Den Beweis hierzu findet man bei [36] in Beispiel I.1. (c). In der Tat: Zunächst ist der Raum der beschränkten Funktionen $(l^\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$

[36] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000

ein Banachraum und so kann man $C_b(E)$ als Unterraum auffassen. Die Abgeschlossenheit folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz.

Bezeichnet man mit $C_0(E)$ alle stetigen Funktionen f auf E, so dass $f(x) \to 0$, $x \to \pm\infty$ so muss E lediglich lokalkompakt sein, damit $(C_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Ein topologischer Raum heißt hierbei lokalkompakt, wenn jeder Punkt eine Umgebungsbasis aus kompakten Mengen besitzt.

Zu einer Übergangsfunktion $(P_t)_{t\geq 0}$ eines *homogenen* Markov-Prozesses definieren wir eine Halbgruppe $T_t \colon C_0(E) \to C_0(E)$ durch

$$T_t f(x) = \int f(y) P_t(x, dy).$$

Ausgeschrieben heißt das, dass

$$T_t f(x) = E[f(X_t) \mid X_0 = x]$$

gilt. Die Halbgruppeneigenschaft folgt aus der Chapman-Kolmogorov Gleichung (201).

Umgekehrt erhält man nach dem Satz von Riesz aus jeder positiven, kontraktiven C_0-Halbgruppe eine Übergangsfunktion.

Für einen Markov-Prozess X schreiben wir oft T^X für die zugehörige Halbgruppe und A^X für den zugehörigen Generator.

Definition 210. Für den Markov-Prozess X mit Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ definieren wir den *Generator* A durch

$$Af(x) := \lim_{t\to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}, \quad x \in E$$

auf $\operatorname{dom}(A) = \Big\{ f \in C_0(E) \colon \lim_{t\to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t} \text{ existiert } \forall x \in E \Big\}$.

Beispiel 211 (Generator des Poisson Prozesses). Sei N ein homogener Poisson Prozess mit Intensität λ. Dann ist

$$T_t f(x) = E[f(N_t) \mid N_0 = x] = \sum_{k\geq 0} f(x+k)\, e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Die Übergangsfunktion ist gegeben durch

$$P_t(x, \{k+x\}) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

für $x = 0, 1, 2, \ldots$ Wir berechnen den Generator. $T_t f(x)$ is differenzierbar in t, also bilden wir gleich die Ableitung:

$$\begin{aligned} Af(x) &= \partial_t\big(T_t f(x)\big) \\ &= \partial_t \sum_{k\geq 0} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &= \partial_t\left((x+k)e^{-\lambda t} + \sum_{k\geq 1} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right)\bigg|_{t=0} \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned} \partial_t \sum_{k\geq 1} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} &= -\lambda \sum_{k\geq 1} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \\ &\quad + \lambda f(x+1)e^{-\lambda t} + \lambda \sum_{k\geq 2} f(x+k)e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}. \end{aligned}$$

Da T differenzierbar ist, ist T stetig. Ebenso ist Tf beschränkt, und Differenzierbarkeit an $t = 0$ liefert, dass der Poisson Prozess ein Feller Prozess ist.

Ausgewertet an der Stelle $t = 0$ erhalten wir

$$Af(x) = -\lambda f(x) + \lambda f(x+1) = \lambda(f(x+1) - f(x)).$$

Der Generator beschreibt demnach die instantane Veränderung $(f(x+1) - f(x))$ multipliziert mit der Rate λ, mit der ein Sprung auftritt.

Satz 212. *Für eine Halbgruppe $(T_t)_{t\geq 0}$ mit Generator A und $f \in \mathrm{dom}(A)$ gilt*

(i) $T_t f \in \mathrm{dom}(A)$,

(ii) $t \mapsto T_t f$ *ist differenzierbar und*

$$\frac{d}{dt}T_t f = AT_t f = T_t A f\,,$$

(iii) $T_t f - f = \int_0^t T_s A f ds$.

Beweis. Sei $t \geq 0$. Wir überprüfen (i): Zunächst ist

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{T_{t+h}f - T_t f}{h} &\overset{T\text{ HG}}{=} \lim_{h\to 0}\frac{T_t T_h f - T_t f}{h} \\ &\overset{T\text{ lin.}}{=} \lim_{t\to 0} T_t\,\frac{T_h f - f}{h} = T_t A f; \end{aligned}$$

denn $Af = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(T_h f - f)$, da A der Generator der Halbgruppe ist. Also folgt (i). Außerdem haben wir gezeigt, dass

$$AT_t f = T_t A f.$$

Wir haben ebenfalls gezeigt, dass $t \mapsto T_t f$ eine rechtseitige Ableitung $(T_t A f)$ besitzt, und zwar für alle $t \geq 0$. Da diese Funktion stetig ist, ist sie messbar und wir setzen

$$F(t) = \int_0^t T_s A f ds.$$

Die Funktion F ist differenzierbar mit Ableitung $T_t A f$. Zwei stetige Funktionen, mit den gleichen rechtsseitigen Ableitungen unterscheiden sich maximal durch eine Konstante und somit ist

$$T_t f = F(t) + g$$

mit Konstante g. An $t = 0$ errechnen wir $T_0 f = f = g$, also

$$T_t f = f + \int_0^t T_s A f ds$$

und es folgt auch, dass $t \mapsto T_t f$ sogar differenzierbar ist mit Ableitung $T_t A f = A T_t f$. □

Wir erhalten

$$E[f(X_t) \mid X_0 = x] - f(x) = \int_0^t T_s A f(x) ds\,.$$

Allerdings ist

$$f(X_t) - E[f(X_t)]$$

zentriert und könnte zu Martingalen führen. Diese fruchtbare Beziehung zwischen Generatoren und Martingalen wird in folgendem Satz bewiesen.

Satz 213 (Dynkin Formel)**.** *Sei X ein zeithomogener Markov-Prozess mit Generator A. Dann gilt für alle $f \in \operatorname{dom}(A)$, dass*

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Af(X_s) ds\,,\ T \geq 0$$

ein $\mathbb{F}$-Martingal. Weiterhin gilt für alle endlichen Stoppzeiten

$$E_x[f(X_T)] = f(x) + E_x\left[\int_0^T Af(X_s) ds\right]$$

Beweis. Zunächst ist für ein festes $t \geq 0$ und jedes $s \geq 0$, $(M^f = M)$

$$M_{t+s} - M_t = f(X_{t+s}) - f(X_t) - \int_t^{t+s} Af(X_u) du =: F(X_u \colon t \leq u \leq t+s);$$

hierbei haben wir genutzt, dass mit obiger Formel $M_{t+s} - M_t$ als Funktion von $(X_u)_{t \le u \le t+s}$ geschrieben werden kann (und diese Funktion mit F bezeichnet). Wegen der Markov-Eigenschaft ist

$$E[M_{t+s} - M_t \mid \mathscr{F}_t] = E\big[F(X_u \colon t \le u \le t+s) \mid \mathscr{F}_t\big] = E\big[F(X_u \colon t \le u \le t+s) \mid X_t\big].$$

Da der Markov-Prozess homogen ist, folgt

$$E\big[F(X_u \colon u \in [t, t+s]) \mid X_t = x\big] = E\big[F(X_u \colon 0 \le u \le s) \mid X_0 = x\big] =: E_x\big[F(X_u \colon u \in [t, t+s])\big].$$

Wir haben

$$\frac{d}{dt}\big(T_t f(x)\big) = \frac{d}{dt} E_x\big[f(X_t)\big] \overset{212}{=} T_t A f(x) = E_x\big[Af(X_t)\big]$$

also

$$E_x\big[f(X_t)\big] = f(x) + \int_0^t E_x\big[Af(X_s)\big] ds.$$

daraus folgt für alle $x \in E$, dass

$$\begin{aligned} E[M_t|X_0 = x] &= E\Big[f(X_t) - x - \int_0^t Af(X_s)ds|X_0 = x] \\ &= f(x) + \int_0^t E_x\big[Af(X_s)\big]ds - f(x) - E\Big[\int_0^t Af(X_s)ds|X_0 = x\Big], \end{aligned}$$

und mit dem Satz von Fubini folgt $E[M_t - M_0|X_0 = x] = 0$ für alle $x \in E$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= [M_t - M_0|X_0] = E\big[F(X_u \colon 0 \le u \le s) \mid X_0\big] = E\big[F(X_u \colon u \in [t, t+s]) \mid X_t\big] \\ &= E[M_{t+s} - M_t \mid \mathscr{F}_t], \end{aligned}$$

also ist M ein Martingal. Durch das Optional Stopping Theorem erhalten wir die zweite Aussage. □

Beispiel 214 (Generator einer Brownschen Bewegung mit Drift)**.** Hierzu sei $X_t = at + bB_t$, mit einer Standard-Brownschen Bewegung B. Ist $f \in L^2$, so gilt mit der Ito-Formel, dass

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(0) + \int_0^t \partial_x f(X_s) a ds + \int_0^t \partial_x f(X_s) b dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_x^2 f(X_s) b^2 ds \\ &= f(0) + M_t^f + \int_0^t \big(a\partial_x + \frac{b^2}{2}\partial_x^2\big) f(X_s) a ds \end{aligned}$$

also ist $A = a\partial_x + \frac{b^2}{2}\partial_x^2$. Wir haben

$$X_t = X_0 + \int_0^t a ds + \int_0^t b dB_s\,.$$

Beispiel 215 (Generator einer Diffusion)**.** Betrachten wir

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t,$$

so gilt für $f(X_t)$ die Darstellung

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t^f + \int_0^t Af(X_s)ds\,,$$

so ist der Ausdruck $\int_0^t Af(X_s)ds$ stetig, also vorhersehbar, also $f(X_t)$ ein spezielles Semimartingal. Wie in vorigem Beispiel erhalten wir

$$A = a(x)\partial_x + \frac{b^2(x)}{2}\partial_x^2.$$

Außerdem gilt formell

$$\frac{d}{dt}T_t f = T_t A f$$

oder

$$\frac{d}{dt}T_t f = A^* T_t f$$

mit adjungiertem Operator A^*. Diese Gleichung nennt man *Fokker-Planck Gleichung*. Schauen wir uns diese Gleichung noch einmal genauer an. Nehmen wir an, dass der homogene Markov-Prozess X zu jeder Zeit eine Dichte hat, also

$$P_{0,t}(x, A) = \int_A p_t(x,u)du,$$

mit Übergangsdichte $p_t(x)$. Nach obiger Gleichung gilt

$$\frac{d}{dt}T_t f(x) = \frac{d}{dt}E[f(X_t)|X_0 = x] = \frac{d}{dt}\int f(u)p_t(x,u)du = \int Af(u)p_t(u)du,$$

zumindest für alle $f \in C^2$. Können wir auch hier den adjungierten Operator bilden erhalten wir

$$\frac{d}{dt}p_t(u) = A^* p_t(u),$$

und die Fokker-Planck Gleichung überträgt sich auf die Übergangsdichten.

Definition 216. Sei X ein Markov Prozess. Gibt es für eine messbare Funktion $f\colon E \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion $g\colon E \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t g(X_s)ds\,, \quad t \geq 0 \tag{217}$$

ein (lokales) Martingal ist, so setzt man $Af := g$. Der Operator A heißt *erweiterter Generator* und alle g welche (217) erfüllen, bezeichnet man als D_A (die Domain des erweiterten Generators).

Beispiele haben vielfältige Anwendungen in der Finanzmathematik:

- Black-Scholes: $dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dB_t \qquad (Af(x) = \mu x \partial_x + \frac{\sigma^2}{2} x \partial_x^2)$
- Vasicek-Modell: $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma dB_t$ „Lineare Differentialgleichung“
- Cox-Ingersoll-Ross: $dr_t = \kappa(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dB_t$ „χ^2-ähnlich“
- Heston-Modell: $dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma_t dB_t$
  und $d\sigma_t = \kappa(\theta - \sigma_t)dt + \sigma' \sqrt{\sigma_t} dB_t'$

Das Vasicek-Modell, Cox-Ingersoll-Ross-Modell und Heston-Modell sind affine Modelle, welche wir im Folgenden noch genauer kennenlernen werden.

Affine Prozesse

Wir fixieren einen Zustandsraum $E \subseteq \mathbb{R}^d$ und nehmen an, dass E abgeschlossen ist mit offenem Inneren. Seien

$$b\colon E \to \mathbb{R}^d$$

und

$$\sigma\colon E \to \mathbb{R}^{d\times d}$$

stetige Funktionen.

Wir nehmen an, dass für jedes $x \in E$ eine eindeutige (schwache) Lösung $X = X^x$ der stochastischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} dX_t &= b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t \\ X_0 &= x \end{aligned}$$

existiert und ein starker Markov-Prozess ist.

Definition 218. X heißt *affin*, falls

$$E\left[e^{u^\top X_T} \mid \mathscr{F}_t\right] = \exp\left(\phi(u, T-t) + \psi(u, T-t)^\top X_t\right)$$

für alle $u \in i\mathbb{R}^d$, $0 \le t \le T$, $x \in E$. Hierbei seien

$$\begin{aligned} \phi&\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C} \\ \psi&\colon \mathbb{C}^d \times \mathbb{R}_{\ge 0} \to \mathbb{C}^d \end{aligned}$$

Funktionen mit stetigen Ableitungen in t.

Die Brownsche Bewegung und der zusammengesetzte Poisson Prozess sind affin. Allgemeiner sind sogar alle Prozesse mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (Lévy-Prozesse) affin, denn

$$E\left[e^{u(L_T-L_t)} \mid \mathscr{F}_t\right]e^{uL_t} = E\left[e^{u(L_T-L_t)}\right]e^{uL_t} = e^{\phi(u,T-t)}e^{\psi(u,T-t)L_t}$$

Theorem 219. *Angenommen X ist affin. Dann sind auch b und $c = \sigma\sigma^\top$ affin*

$$\begin{aligned} b(X) &= \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_i X_i \\ c(X) &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^d \gamma_i X_i \end{aligned}$$

für d-dimensionale Vektoren $\beta_0, \dots, \beta_d$ und $d \times d$-Matrizen $\gamma_0, \dots, \gamma_d$.

Die Funktionen ϕ und ψ lösen folgende Riccati-Gleichungen (Gleichungen vom Typ $f' = af^2$):

$$\begin{aligned}
\partial_t \phi(u,t) &= \beta_0^\top \psi(u,t) + \frac{1}{2}\psi(u,t)^\top \gamma_0 \psi(u,t) \\
\phi(u,0) &= 0 \\
\partial_t \psi_i(u,t) &= \beta_i^\top \psi(u,t) + \frac{1}{2}\psi(u,t)^\top \gamma_i \psi(u,t) \\
\psi(u,0) &= u
\end{aligned}$$

Beweis. Sei nun X affin. Wir betrachten das Martingal

$$M_t = e^{\phi(u,T-t)+\psi(u,T-t)^\top X_t}, \qquad 0 \leq t \leq T \tag{220}$$

Mit der Itô-Formel folgt

$$\begin{aligned}
dM_t = M_t\big(&(-\partial_t \phi(u,T-t) - \partial_t \psi(u,T-t)^\top X_t\big)dt \\
&+ M_t \psi(u,T-t)^\top (b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t) \\
&+ \frac{1}{2} M_t \psi(u,T-t)^\top c(X_t)\psi(u,T-t)dt
\end{aligned}$$

Da M ein Martingal ist, muss der dt-Teil fast überall verschwinden. Der Zustandsraum von X hat eine offenes Inneres. Es folgt für alle $x \in E$, $t \in [0,1]$ und $u \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
0 &= -\partial_t \phi(u,T-t) - \partial_t \psi(u,T-t)^\top x + \psi(u,T-t)^\top b(x) \\
&+ \frac{1}{2}\psi(u,T-t)^\top c(x)\psi(u,T-t) \\
&= -\partial_t \phi(u,t) - \partial_t \psi(u,t)^\top x + \psi(u,t)^\top b(x) + \frac{1}{2}\psi(u,t)^\top c(x)\psi(u,t)
\end{aligned}$$

wobei $-\partial_t \phi(u,T-t) - \partial_t \psi(u,T-t)^\top x$ affin in x ist. Da die linke Seite der Gleichung affin in x ist, gilt dies auch für die rechte Seite. Darüber hinaus ist $\psi(u,0) = u$, so dass sowohl $b(x)$ als auch $c(x)$ affin sein müssen, also

$$\begin{aligned}
b(x) &= \beta_0 + \sum_{i=1}^d \beta_i x_i \\
c(x) &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^d \gamma_i x_i
\end{aligned}$$

separieren der Koeffizienten liefert die Riccati-Gleichungen. (Anmerkung: typische Prüfungsfrage: „Leiten sie den affinen Teil der Riccati Gleichungen her.“)

□

Bemerkung 221. ϕ erhält man durch Integration direkt aus ψ.

Theorem 222. *Sind umgekehrt b und c affin und gibt es eine Lösung (ϕ, ψ) der Riccati Gleichungen, so dass*

$$\big(\phi(u,t) + \psi(u,t)^\top x\big) \leq 0 \qquad\qquad \forall u \in i\mathbb{R}^d$$

und $t \geq 0$, $x \in E$ so ist X affin.

Beweis. Definieren wir M wie im vorigen Beweis (220) so ist M ein beschränktes lokales Martingal, also ein Martingal und

$$E\big[e^{u^\top X_t} \mid X_0 = x\big] = e^{\phi(u,t)+\psi(u,t)^\top x}.$$

Dies legt die Übergangsfunktion des Markov-Prozesses X eindeutig fest. Existenz eines solchen Markov-Prozesses folgt nach dem Existenzresultat von Kolmogorov □

Anwendung: In affinen Zinsstrukturmodellen gilt

$$P(t,T) = e^{A(t,T)+B(t,T)^\top X_t},$$

wobei X ein Faktorprozess ist und

$$\big(P(t,T)\big)_{0\leq t\leq T}, \qquad T > 0$$

die Familie der Bondpreise (also der Produkte mit Auszahlung 1 an T), es gilt $P(T,T) = 1$.
Aus No-Arbitrage Gründen gilt:

$$P(t,T) = E^{Q}\big[e^{-\int_t^T r_n du}\mathbb{1} \mid \mathscr{F}_t\big]$$

Beispiel 223 (Vasicek-Modell/Ornstein-Uhlenbeck Prozess)**.** Sei mit $\gamma_0 = \sigma^2$ und $\gamma_1 = 0$

$$dX_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t)dt + \sigma dW_t\,.$$

Dann ist X affin.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad \partial_t \psi(u,t) &= \psi(u,t)\beta_1 \\ \Longrightarrow \qquad \psi(u,t) &= c(u)e^{\beta_1 \cdot t} \end{aligned}$$

Aus $\psi(u,0) = u$ erhält man $c(u) = u$, so dass

$$\psi(u,t) = ue^{\beta_1 t}$$

und

$$
\begin{aligned}
\partial_t \phi(u,t) &= \frac{\sigma^2}{2}\psi(u,t)^2 + \beta_0 \psi(u,t) \\
\implies \qquad \phi(u,t) &= \frac{\sigma^2}{2}\int_0^t u^2 e^{2\beta_1 s} ds + \beta_0 \int_0^t u e^{\beta_1 s} ds \\
&= \frac{\sigma^2 u^2}{2}\frac{1}{2\beta_1}\left(e^{2\beta_1 t} - 1\right) + \frac{\beta_0 u}{\beta_1}\left(e^{\beta_1 t} - 1\right) \\
\implies \qquad E\left[e^{uX_t} \mid X_0 = 0\right] &= e^{\frac{u^2}{2}s^2 + u\cdot M(x)}
\end{aligned}
$$

Damit ist $X_t \mid X_0$ normalverteilt und X ist ein Gaußprozess

Lemma 224 (Riccati Differentialgleichung). *Betrachte*

$$
\begin{aligned}
\partial_t G &= AG^2 + BG - C \\
G(0,u) &= u
\end{aligned}
$$

$A, B, C \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}$, $A \neq 0$ und $B^2 + \psi AC \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Sei G die analytische Erweiterung auf $\mathbb{C}$ und $\Theta = \sqrt{B^2 + \psi AC}$ dann ist

$$
G(t,u) = -\frac{2C(e^{\Theta t} - 1) - \left(\Theta(e^{\Theta t} + 1) + B(e^{\Theta t} - 1)\right)u}{\Theta(e^{\Theta t} + 1) - B(e^{\Theta t} - 1) - 2A(e^{\Theta t} - 1)u}
$$

Außerdem ist

$$
\int_0^t G(s,u)ds = \frac{1}{A}\log\left(\frac{2\Theta e^{\frac{\Theta - \beta}{2}t}}{\Theta(e^{\Theta t} + 1) - B(e^{\Theta t} - 1) - 2A(e^{\Theta t} - 1)u}\right)
$$

Beispiel 225 (Cox-Ingersoll-Ross). Hier ist

$$
dX_t = (\beta_0 + \beta_1 X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t
$$

also $\gamma_0 = 0$ und $\gamma_1 = \sigma^2$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\phi'(u,t) &= \beta_0 \psi(u,t) \\
\psi'(u,t) &= \frac{\psi(u,t)^2\sigma^2}{2} + \beta_1 \psi(u,t)
\end{aligned}
$$

Wir wenden Lemma 224 an (Abbildung fehlt)

$$
\begin{aligned}
& A = \frac{\sigma^2}{2}, \quad B = \beta_1 = -\kappa < 0, , \quad c = 0 \\
\implies & \qquad \Theta = \sqrt{\kappa^2} = \kappa \\
\implies & \qquad = -\frac{\big(\kappa(e^{\kappa t}+1) - \kappa(e^{\kappa t}-1)\big)\cdot u}{\kappa(e^{\kappa t}+1) + \kappa(e^{\kappa t}-1) - \sigma^2(e^{\kappa t}-1)\cdot u} \\
& \qquad = \frac{2\kappa u}{2\kappa e^{\kappa t} - \sigma^2(e^{\kappa t}-1)\cdot u} \\
& \phi(u,t) = \frac{\beta_0 \cdot 2}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\kappa e^{\kappa t}}{2\kappa e^{\kappa t} - \sigma^2(e^{\kappa t}-1)u}\right) \\
& \qquad = \frac{\beta_0 \cdot 2}{\sigma^2} \log\left(\frac{2\kappa}{2\kappa - \sigma^2(1-e^{-\kappa t})\cdot u}\right) \\
\implies & \quad E\left[e^{uX_t} \mid X_0 = 0\right] = \left(\frac{a}{b+u}\right)^c \cdot e^{\frac{dux}{f+gu}}
\end{aligned}
$$

Das ist die Verteilungsfunktion einer nichtzentralen χ^2-Verteilung.

Wir betrachten nun den kanonischen Zustandsraum $E = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$ mit $d = m + n$. Seien $I = \{1, \dots, m\}$ und $J = \{m+1, \dots, d\}$. Wir schreiben

$$
\begin{aligned}
b_M &= (b_i)_{i \in M} \\
\sigma_{MN} &= (\sigma_{ij})_{i \in M,\, j \in N}
\end{aligned}
$$

Anmerkung zum folgenden Theorem:

$$c(x) = \gamma_0 + \sum_I \gamma_i x_i + \sum_J \gamma_j x_j$$

Schließlich erhalten wir noch folgendes allgemeine Resultat

Theorem 226. *Der Prozess X ist affin auf E genau dann, wenn b und c affin sind mit Parametern $\beta.$, $\gamma.$ welche* zulässig *in folgendem Sinne sind:*

(i) γ_i *für* $i = 0, \dots, d$ *ist symmetrisch und positiv semi-definit.*

(ii) $\gamma_{0II} = 0$ *und* $(\gamma_{0IJ} = \gamma_{0JI})$

(iii) $\gamma_0 = 0$ *für* $j \in J$

(iv) $\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk} = 0$ *für* $k \in I \setminus \{i\}$ *für* $1 \leq i, l \leq d$

(v) $\beta_0 \in E = \mathbb{R}_+^m \times \mathbb{R}^n$

(vi) $B_{IJ} = 0$ *wobei* $B = (\beta_1, \dots, \beta_d)$

(vii) B_{II} *hat nicht negative Einträge außerhalb der Diagonalen.*

Die Riccati-Gleichungen vereinfachen sich zu

$$\begin{aligned}\partial_t \phi(u,t) &= \frac{1}{2}\psi_J(u,t)\gamma_{0JJ}(u,t) + \beta_0^\top \psi(u,t) \\ \partial_t \psi_i(u,t) &= \frac{1}{2}\psi(u,t)^\top \gamma_i \psi(u,t) + \beta_i^\top \psi(u,t)\,, \qquad i \in I \\ \partial_t \psi_J(u,t) &= B_{JJ}^\top \psi_J(u,t)\end{aligned}$$

Beispiel 227. Sei $d = 3$.

(1) $m = 0 \implies E = \mathbb{R}^3$, $c(x) = \gamma_0$

(2) $m = 1$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & \cdot \\ & & + \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} + & \cdot & \cdot \\ & + & \cdot \\ & & + \end{pmatrix}, \quad B_{11} \geq 0\,,\ B_{ij} = 0\,,\ j = 2,3$$

(3) $m = 2$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix}, \qquad \gamma_1 = \begin{pmatrix} + & 0 & \cdot \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & \cdot \\ & & + \end{pmatrix}$$

(4) $m = 3 \implies \gamma_0 = 0$

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} + & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & + & 0 \\ & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 \\ & & + \end{pmatrix}$$

Lemma 228 (Invarianz Lemma)**.** *Angenommen b und σ haben eine stetige Erweiterung auf $\mathbb{R}^d$, so dass C ebenfalls stetig ist. Sei $u \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^d : x^\top u \geq 0\}\,.$$

Sei $x \in \partial H = \{x \in \mathbb{R}^d : u^\top x = 0\}$ und $X = X^x$ schwache und eindeutige Lösung

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t\,, \quad X_0 = x\,.$$

Gilt $X_t \in H$ für alle $t \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} u^\top b(x) &\geq 0 && (\text{„Der Drift zeigt nach innen.“}) \\ u^\top c(x) u &= 0 && (\text{„Die Diffusion ist parallel zum Rand.“}) \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst ist

$$u^\top X_t = u^\top x + u^\top \int_0^t b(X_s)ds + u^\top \int_0^t \sigma(X_s)dW_s$$

Wir wählen $T_1 = \inf\{\|X_t\| \geq K\}$ damit ist

$$\int_0^{t\wedge T_1} \sigma(X_s)dW_s$$

ein Martingal, also

$$E[u^\top X_{t\wedge T_1}] = E\left[\int_0^{t\wedge T_1} u^\top b(X_s)ds\right]$$

Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch:
Angenommen $u^\top b(x) < 0$. Aufgrund der Stetigkeit von b existiert ein $\varepsilon > 0$ und eine Stoppzeit $T_2 > 0$, so dass

$$\begin{aligned} & u^\top b(X_t) \leq -\varepsilon \qquad \text{für } t \leq T_2 \\ \Longrightarrow \qquad & E[u^\top X_{T_1\wedge T_2}] < 0 \end{aligned}$$

das ist ein Widerspruch zu $X_t \in H$ für alle $t \geq 0$.
Für den zweiten Teil sei $\delta > 0$ und

$$Z_t = \mathscr{E}(-\delta u^\top \sigma(X) \cdot W)_t$$

Dann ist Z lokales Martingal positiv und $Z_0 = 1$ ($Z = \mathscr{E}(Y)$ löst $dZ = Z_- dY$). Es folgt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} u^\top X_t Z_t &= u^\top \left(\int_0^t X_s ds + \int_0^t Z_s X_s dX_s + \langle Z, X\rangle \right) \\ &= u^\top \Big(-\int_0^t X_s Z_s \delta u^\top \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t Z_s b(X_s) ds \\ &+ \int_0^t Z_s \sigma(X_s) dW_s - \int_0^t Z_s \delta u^\top \sigma(X_s)\sigma(X_s)^\top ds \Big) \\ &= u^\top \left(-\int_0^t X_s Z_s \delta u^\top \sigma(X_s) dW_s + \int_0^t Z_s b(X_s) ds - \int_0^t Z_s \delta u^\top c(X_s) ds \right) \end{aligned}$$

Wieder stoppen wir geeignet und erhalten

$$E\big[u^\top X_{t\wedge T_3} Z_{t\wedge T_3}\big] = E\left[\int_0^{t\wedge T_3} Z_s\big(u^\top b(X_s) - \delta u^\top c(X_s)u\big)ds\right]$$

Angenommen $u^\top c(x)u > 0$. Dann können wir δ so groß wählen, dass der Integrand auf $[0, T_4] < 0$ ist und wir erhalten einen Widerspruch.

$\square$

Charakteristische Funktion

Definiere

$$S(u) := \{z \in \mathbb{C}^k : z \in U\}$$

Sei ν ein beschränktes Maß auf $\mathbb{R}^d$ und definiere

$$G(z) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{Z^\top X} \nu(dx)$$

Dann ist $G(z)$ wohldefiniert auf $S(\nu)$ mit $V = \{y \in \mathbb{R}^d : G(y) < \infty\}$.
Die Abbildung

$$Y : y \in i\mathbb{R}^d \to G(y)$$

nennt man charakteristische Funktion. Es ist für $d = 1$, $t \in \mathbb{R}$

$$|\phi(t)| \leq 1$$
$$|\phi(t+h) - \phi(t)| \leq \int |e^{ikx} - 1| \nu(dx)$$

so dass ϕ *gleichgradig stetig* ist.

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} E[X^k]$$

mit $X \sim \nu$ falls $E[e^{|tX|}] < \infty$.
Sind X und Y unabhängig, so ist

$$E[\phi^{iu(X+Y)}] = E[\phi^{iuX}] E[\phi^{iuY}]$$

also $\phi_{X*Y} = \phi_X \cdot \phi_Y$.

Theorem 229. *Gilt $\nu(\{a\}) > \nu(\{b\}) = 0$, so ist*

$$\nu([a,b]) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \phi(t) dt$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \phi(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \int e^{itx} \nu(dx) dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int \int_{-T}^{T} \frac{e^{-it(a-x)} - e^{it(b-x)}}{it} \phi(t) dt \nu(dx)
\end{aligned}$$

Wir definieren

$$S(T) \int_0^T \frac{\sin x}{x} dx \qquad \Longrightarrow \qquad S(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

also ist S beschränkt. Weiter gilt

$$\int_0^T \frac{\sin x\Theta}{x} dx = \operatorname{sgn}(\Theta) \cdot S(T \cdot |\Theta|), \quad T \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \phi(t) dt = \int \left[\frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\pi} S(T \cdot |X-a|) - \frac{\operatorname{sgn}(x-b)}{\pi} S(T \cdot |X-b|) \right] \nu(dx)$$

Definiere

$$\psi_{a,b}(T) := \frac{\operatorname{sgn}(x-a)}{\pi} S(T \cdot |X-a|) - \frac{\operatorname{sgn}(x-b)}{\pi} S(T \cdot |X-b|)$$

Dann ergibt sich

$$\psi_{a,b}(\infty) = \begin{cases} 0 & X < a \\ \frac{1}{2} & X = a \\ 1 & a < X < b \\ \frac{1}{2} & X = b \\ 0 & X > b \end{cases}$$

und es ist $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt \ < \ \infty$ dann ist ν ist absolut stetig (bzgl. Lebesque-Maß) und

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi(t) dt \, .$$

Nach dem Stetigkeitssatz gilt $\nu_n \implies \nu$ bzw. $(X_n \xrightarrow{\mathscr{L}} X)$ ist äquivalent zu $\psi_{\nu_n} \to \psi_\nu$. $\square$

Anhang

Das Theorem von Hahn und Banach

Ein *topologischer Vektorraum* E ist ein Vektorraum mit einer Topologie, so dass gilt:

1. die Addition ist stetig,
2. die Skalarmultiplikation ist stetig.

Wir nennen einen topologischen Vektorraum E *lokal konvexen Raum*, falls seine Topologie von einer Basis aus konvexen Mengen erzeugt wird. Für weitere Informationen hierzu sei auf [37] verwiesen.

[37] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000

Theorem 230 (Hahn-Banach). *Seien B und C nicht-leere Teilmengen des lokal konvexen Raumes E und*

1. $B \cap C = \varnothing$,
2. B, C *konvex,*
3. B *kompakt,* C *abgeschlossen.*

Dann gibt es ein stetiges lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{R}$, so dass

$$\sup_{x \in C} \ell(x) < \inf_{x \in B} \ell(x).$$

Literaturverzeichnis

E. Çinlar, J. Jacod, P. Protter, and M. Sharpe. Semimartingales and Markov processes. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 54(2):161–219, 1980.

F. Delbaen. *The mathematics of arbitrage*. Springer, 2006.

C. Dellacherie and P.-A. Meyer. *Probabilities and potential*, volume 29 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978.

C. Dellacherie and P. A. Meyer. *Probabilités et potentiel*. Hermann: Paris, 1982.

E. Eberlein and J. Kallsen. *Mathematical Finance*. Springer, 2019.

Encyclopedia of Mathematics. Function of bounded variation, 2023. URL `http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Function_of_bounded_variation&oldid=44779`. Accessed on 2023-12-04.

S. Ethier and T. Kurtz. *Markov Processes: Characterization and Convergence*. Wiley, New York, 1986.

H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic Finance*. Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edition, 2003.

Y. Kabanov. *Markets with Transaction Costs Mathematical Theory*. Springer, 2009.

O. Kallenberg. *Foundations of modern probability*. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, second edition, 2002. ISBN 0-387-95313-2.

O. Kallenberg. *Foundations of modern probability (3rd Edition)*. Springer, 2021.

J. Kallsen. σ-localization and σ-martingales. *Theory of Probability & Its Applications*, 48(1):152–163, 2004.

I. Karatzas and S. E. Shreve. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 1988.

M. Métivier. *Semimartingales: a course on stochastic processes*, volume 2. Walter de Gruyter, 2011.

A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probab. Surv.*, 3:345–412, 2006. ISSN 1549-5787. DOI: 10.1214/154957806000000104. URL http://dx.doi.org/10.1214/154957806000000104.

D. Revuz and M. Yor. *Continuous Martingales and Brownian Motion*. Springer Verlag. Berlin Heidelberg New York, 3rd ed. p. cm. edition, 2005.

M. Sharpe. *General theory of Markov processes*. Academic press, 1988.

D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer, 2000.