UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 6

Abgabe: Freitag, 30.11.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $a\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine càdlàg Funktion von lokal beschränkter Variation mit $a_0 = 0$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $\operatorname{Var}(a)\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ist eine monoton wachsende càdlàg Funktion mit $\operatorname{Var}(a)_0 = 0$ und $|a| \leq \operatorname{Var}(a)$.
2. Es gilt $\Delta \operatorname{Var}(a) = |\Delta a|$ und $\operatorname{Var}(a) = \operatorname{Var}(a)_- + |\Delta a|$.
3. Es gilt $\operatorname{Var}(a) \leq \operatorname{Var}(a)_- + |a_-| + |a|$.
4. Es existieren eindeutig bestimmte monoton wachsende càdlàg Funktionen $b, c\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $b_0 = c_0 = 0$, so dass $a = b - c$ und $\operatorname{Var}(a) = b + c$. Diese sind gegeben durch $b = (a + \operatorname{Var}(a))/2$ und $c = b - a$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie $\mathscr{M}_{loc} \cap \mathcal{V} \subset \mathscr{A}_{loc}$.

Hinweis: Betrachten Sie für $A \in \mathscr{M} \cap \mathscr{V}$ die die Stoppzeitenfolge $T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | \operatorname{Var}(A) > n\}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie: Jedes $A \in \mathscr{A}^+$ ist ein Submartingal der Klasse (D).

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie die Eindeutigkeit in Satz 104.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Es sei W eine Brownsche Bewegung mit Varianzfunktion $E[W_t^2] := \sigma_t^2$.

i) Die Varianzfunktion σ^2 ist stetig.
ii) Es gilt $W \in \mathscr{H}^2_{loc}$ mit $\langle W, W \rangle = \sigma^2$.