UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse **Wintersemester 2023/24**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 5

Abgabe: Freitag, 24.11.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte). Es sei T eine Stoppzeit und $t > 0$. Zeigen Sie

i) $T + t$ ist eine vorhersehbare Zeit.

ii) $T \equiv t$ ist eine vorhersehbare Zeit.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $\mathscr{P} = \sigma(\{A \times \{0\} | A \in \mathscr{F}_0\} \cup \{[\![0, T]\!] | T \text{ ist eine Stoppzeit}\})$. *Für einen Beweis dieser Aussage siehe [1, Theorem 2.2].*

Aufgabe 2 (4 Punkte). Es sei $A \in \mathscr{P}$ eine vorhersehbare Menge. Falls für jede vorhersehbare Zeit T mit $[\![T]\!] \subset A$ gilt, dass $P[T = \infty] = 1$, dann ist A eine verschwindende Menge.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $A^* := \{\omega \in \Omega | (\omega, t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}$ *messbar ist. Nehmen Sie an, dass A keine verschwindende Menge ist und verwenden Sie folgenden Satz, um einen Widerspruch zu zeigen.*

Satz 1 (Satz vom vorhersehbaren Schnitt). [1, Theorem 2.14]; Es seien $A \in \mathscr{P}$ eine vorhersehbare Menge und $A_\Omega \in \mathscr{A}$ eine Menge mit

$$A_\Omega = \{\omega \in \Omega : (\omega, t) \in A \text{ für ein } t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine vorhersehbare Zeit T mit $[\![T]\!] \subset A$, sodass

$$P(\{T = \infty\} \cap A_\Omega) \leq \epsilon.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte).

i) Es seien X, Y zwei vorhersehbare Prozesse, sodass

$$X_T = Y_T \quad \text{fast sicher auf } \{T < \infty\}.$$

für jede vorhersehbare Zeit T. Zeigen Sie, dass dann X und Y ununterscheidbar sind.

ii) Zeigen Sie die Eindeutigkeit in Theorem 87 der Vorlesung.

Hinweis: Wir sagen, dass A auf B fast sicher gilt, falls $P[A \cap B] = P[B]$ oder äquivalent dazu $P[A^c \cap B] = 0$.

Lebesgue-Stieltjes Maß und Integration

Definition 1. Ein Mengensystem $\mathscr{A} \in 2^\Omega$ heißt Semiring, falls gilt:

1. $\emptyset \in \mathscr{A}$
2. Für je zwei Mengen $A, B \in \mathscr{A}$ ist $B \backslash A$ endliche Vereinigung von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathscr{A}$.
3. $\mathscr{A}$ ist $\cap-$stabil.

Satz 2 (Fortsetzungssatz für Maße). [2, Theorem 1.53]; Sei $\mathscr{A}$ ein Semiring und $\mu \colon \mathscr{A} \to [0, \infty]$ eine additive, σ-subadditive, σ-endliche Mengenfunktion mit $\mu(\emptyset) = 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes, σ-endliches Maß $\tilde{\mu} \colon \sigma(\mathscr{A}) \to [0, \infty]$ mit $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathscr{A}$.

Definition 2. Für eine rechtsstetige monoton wachsende Funktion f heißt das Maß μ_f auf $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ mit $\mu_f[\{0\}] = 0$ (manchmal auch $= f(0)$ das ist aber eine Sache der Definition) und $\mu_f[(s,t]] = f(t) - f(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}_+$, $s < t$, Lebesgue-Stieltjes Maß zur Funktion f.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

i) Beschreiben Sie, welche Voraussetzungen nachzurechnen sind, um die Wohldefiniertheit von Definition 2 zu gewährleisten (Sie müssen diese nicht zeigen!).

ii) Sei f zusätzlich differenzierbar. Zeigen Sie, dass für messbare Abbildungen $h\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ gilt, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+} h(u)\mu_f(du) = \int\limits_{\mathbb{R}_+} h(u)f'(u)du,$$

falls eines der beiden Integrale existiert.

iii) Berechnen Sie $\int_{(0,t]} h(u)df(u) := \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}_{(0,t]}h(u)\mu_f(du)$ für

a) $h(t) = t$ und $f(t) = \exp(\mathrm{t})$

b) h messbar und $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{1}_{[a_n,\infty)}(t)$ für eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Hinweis: Verwenden Sie für ii) den Satz über monotone Klassen. Sie brauchen das Argument nicht im Detail ausführen.

References

[1] Jean Jacod and Albert Shiryaev. *Limit theorems for stochastic processes.* Vol. 288. Springer Science & Business Media, 2013.

[2] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Vol. 1. Springer, 2006.