Stochastische Prozesse **Wintersemester 2023/24**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 12

Abgabe: Freitag, 26.01.2023.

Aufgabe 1 (Compound Poisson-Prozess; 4 Punkte)**.** Sei N ein Poisson-Prozess mit Parameter λ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine iid Folge von reellwertigen Zufallsvariablen mit Verteilung Q, so dass N und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig voneinander sind. Definiere den Prozess X durch

$$X_t := \sum_{n=1}^{N_t} Y_n, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Zeigen Sie, dass X bezüglich seiner eigenen Filtration ein Lévy-Prozess ist und die charakteristische Funktion

$$\mathrm{E}\left[e^{iuX_1}\right] = e^{\int (e^{iux}-1)\lambda Q(dx)}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

besitzt. Geben Sie das zugehörige Lévy-Khintchine-Triplett (b^h, c, K) bezüglich $h(x) = 0$ an.

Hinweis: Siehe Beispiel 155. Bedingen Sie auf N.

Aufgabe 2 (Der Lévy-Prozess im Black-Scholes-Merton-Modell; 8 Punkte)**.**

i) Sei L durch $L_t = bt + \gamma^2 N_t$ gegeben, wobei $b, \gamma^2 \geq 0$ und N einen Poisson-Prozess mit Intensität λ bezeichnet. Zeige, dass L ein Subordinator ist, d.h. ein monoton steigender Lévy-Prozess, und gib sein Lévy-Khintchine-Triplett bezüglich $h(x) = 0$ an.

ii) Geben Sie das Lévy-Khintchine-Triplett bezüglich $h(x) = 0$ des Prozesses $(X_t) = (U_{L_t})$ an, der durch Subordination von L zu einer Standard-Brownschen Bewegung U erhalten wird.

iii) Der Prozess M entsteht durch Subordination von L zu einer Brownschen Bewegung mit Drift B, gegeben durch $B_t = \beta t + W_t$. Geben Sie das Lévy-Khintchine-Triplett bezüglich $h(x) = 0$ an.

iv) Der Lévy-Prozess Z im *Black-Scholes-Merton-Modell* ist charakterisiert durch das Lévy-Khintchine-Triplett $(\mu, \sigma^2, \lambda\mathcal{N}(\beta, \gamma^2))$ bezüglich $h(x) = 0$ mit Parametern $\mu, \beta \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2, \lambda, \gamma^2 \in \mathbb{R}_+$. Zeigen Sie, dass Z geschrieben werden kann als

$$Z_t = \mu t + \sigma \tilde{W}_t + \sum_{k=1}^{\tilde{N}_t} Y_k \tag{1}$$

mit einer Standard-Brownschen Bewegung $\tilde{W}$, einem Poisson-Prozess $\tilde{N}$ mit Parameter λ und einer Sequenz von *iid*-Gaussian-Zufallsvariablen $Y_1, Y_2, \ldots$ mit Erwartungswert β und Varianz γ^2.

Hinweis: Verwenden Sie Theorem 2.24 in [1].

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Das Cox-Ross-Rubinstein (CRR)-Modell ist wie folgt spezifiziert. Fixiere Zahlen $N \in \mathbb{N}$, $-1 < a < b$ und $r \geq 0$. Der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist gegeben durch

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N,$$
$$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega),$$

und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass $P(\{\omega\}) > 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Der Numéraire-Prozess $(\widetilde{S}_n^0)_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\widetilde{S}_n^0 := (1+r)^n,$$

und der Preis eines Finanzinstruments $(\widetilde{S}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist definiert als $\widetilde{S}_0 := 1$ und

$$\widetilde{S}_n(\omega) := \omega_1 \cdot \ldots \cdot \omega_n \quad \text{für } n = 1, \ldots, N.$$

Die Filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0,\ldots,N}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_n := \sigma(\widetilde{S}_0, \ldots, \widetilde{S}_n).$$

Das Ziel dieser Aufgabe ist es zu beweisen, dass das CRR-Modell arbitragefrei ist, genau dann wenn $r \in (a, b)$ ist, und dass es in diesem Fall sogar vollständig ist.

1. Ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ wird als *Martingalmaß* bezeichnet, wenn der Prozess

$$\left(\frac{\widetilde{S}_n}{\widetilde{S}_n^0}\right)_{n=0,\ldots,N}$$

ein Q-Martingal ist. Wir führen die Renditen $(T_i)_{i=1,\ldots,N}$ ein als

$$T_i := \frac{\widetilde{S}_i}{\widetilde{S}_{i-1}}.$$

Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Wahrscheinlichkeitsmaß $Q \sim P$ ein Martingalmaß ist, genau dann wenn

$$E_Q[T_{i+1}|\mathcal{F}_i] = 1 + r \quad \text{für alle } i = 0, \ldots, N-1.$$

2. Angenommen, es existiert ein äquivalentes Martingalmaß $Q \sim P$. Zeigen Sie, dass $r \in (a, b)$ ist.
3. Angenommen, $Q \sim P$ ist ein äquivalentes Martingalmaß. Zeigen Sie, dass die Renditen $(T_i)_{i=1,\ldots,N}$ unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$Q(T_1 = 1+a) = 1-q \quad \text{und} \quad Q(T_1 = 1+b) = q,$$

wobei $q \in (0,1)$ gegeben ist durch

$$q = \frac{r-a}{b-a}.$$

4. Folgern Sie, dass ein äquivalentes Martingalmaß $Q \sim P$ eindeutig ist, sofern es existiert.
5. Nehmen Sie nun an, dass $r \in (a, b)$ ist. Zeigen Sie, dass ein äquivalentes Martingalmaß $Q \sim P$ existiert.

References

[1] Ernst Eberlein and Jan Kallsen. *Mathematical finance*. Springer, 2019.