Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 11

Abgabe: Freitag, 19.01.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(B_t)_{t\geq 0}$ eine Standard Brown'sche Bewegung. Finden Sie Funktionen $a, b\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass der Prozess X gegeben durch

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, B_s)ds + \int_0^t b(s, B_s)dB_s$$

fogende Darstellungen besitzt:

(i) $X_t = B_t^3$.

(ii) $X_t = e^{B_t}$.

(iii) $X_t = tB_t^2 e^{B_t}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.** Es sei X die stetige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t,$$

wobei $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar und lokal beschränkt sind (dh. beschränkt auf kompakten Mengen). Weiter sei $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R})$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion mit kompaktem Support. Zeigen Sie, dass dann

$$f(X_t) = f(X_0) + M_t^f + \int_0^t (Af)(X_s)ds,$$

für ein Martingal M^f gilt. Geben Sie das Martingal M^f und die Abbildung A (Generator) an.

Aufgabe 3 (Binomiales Modell; 6 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, so dass $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$, $\mathscr{F} = 2^\Omega$ und $P[\omega_u] = p = 1 - P[\omega_d]$. Die gehandelten Vermögenswerte werden durch den zweidimensionalen Prozess $S = (S^0, S^1)$ gegeben, mit

$$S_0^0 \equiv 1, \quad S_1^0 \equiv 1 + r, \quad S_0^1 \equiv s_0, \quad S_1^1(\omega_u) = s_0(1+u), \quad S_1^1(\omega_d) = s_0(1+d). \tag{1}$$

i) Zeige, dass es ein Maß $Q \sim P$ auf $(\Omega, \mathscr{F})$ gibt, so dass der diskontierte Preisprozess ein Martingal ist. Ist dieses Marktmodell arbitragefrei?

ii) Angenommen, $p = 0.7$, $s_0 = 100$, $r = 0$, $1 + d = 0.8$ und $1 + u = 1.2$. Was ist das entsprechende risikoneutrale Maß? Zeige, dass $E_P[(S_1 - 100)^+]$ kein arbitragefreier Preis für $H = (S_1 - 100)^+$ (Kaufoption mit Ausübungspreis $K = 100$) ist.

iii) Finden Sie einen Wert ξ_1, so dass $x + \xi_1(S_1 - S_0) = H$. Was ist der anfängliche Preis x? Berechnen Sie $E_Q[H]$. Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.