UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 8

Abgabe: Freitag, 15.12.2023.
Definition 1 (upc-Metrik). Sei $\mathcal{D}$ die Menge aller adaptierten càdlàg Prozesse von $\Omega \times \mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}$. Wir definieren die Metrik $d_{ucp} \colon \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to [0, \infty)$ durch

$$(X, Y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} E[(X - Y)^*_n \wedge 1], \tag{1}$$

wobei $X^*_n \coloneqq \sup_{s \leq n} |X_s|$. Ebenso definiert d_{ucp} eine Metrik auf dem Raum aller adaptierten càglàd Prozesse.

Aufgabe 1 (3 Punkte). Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Für Zufallsvariablen $X, X^1, X^2, \ldots$ gilt stochastische Konvergenz $X^m \to X$ genau dann, wenn $E[|X^m - X| \wedge 1] \to 0$.

ii) Für adaptierte càdlàg (càglàd) Prozesse $X, X^1, X^2, \ldots$ gilt gleichmäßige Konvergenz in Wahrscheinlichkeit auf Kompakta (uniform convergence in probability on compacts - *ucp*) $X_n \to X$ in *ucp*, dh.

$$\lim_{m \to \infty} P\left((X^m - X)^*_t > \varepsilon\right) = 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \text{ und } t > 0,$$

genau dann, wenn $d_{ucp}(X^m, X) \to 0$.

Aufgabe 2 (3 Punkte). Sei $(M^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{H}^2$ mit $M^n \to M$ in $\mathscr{H}^2$. Zeigen Sie, dass dann $\sup_{s \leq t} |M^n_s - M_s| \to 0$ in L^2 für alle $t > 0$. Folgern Sie, dass die Konvergenz auch in *ucp* gilt.

Definition 2.

i) Eine *adaptierte Zerlegung* ist eine Folge $\tau = (T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von Stoppzeiten mit $T_0 = 0$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n = \infty$ und $T_n < T_{n+1}$ auf $\{T_n < \infty\}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

ii) Es seien $X \in \mathcal{S}$ ein Semimartingal, H ein adaptierter Prozess und $\tau = (T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine adaptierte Zerlegung. Dann nennen wir den Prozess $\tau(H \cdot X)$ definiert durch

$$\tau(H \cdot X)_t := \sum_{m \in \mathbb{N}_0} H_{T_m}(X_{T_{m+1} \wedge t} - X_{T_m \wedge t}), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die *τ-Riemann'sche Approximation* von $H \cdot X$.

iii) Eine Folge $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von adaptierten Zerlegungen $\tau_n = (T_{n,m})_{m \in \mathbb{N}_0}$ heißt eine *Riemann'sche Zerlegungsfolge*, falls für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}_0} |T_{n,m+1} \wedge t - T_{n,m} \wedge t| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Sei $X \in \mathscr{S}$ ein Semimartingal, H ein lokal beschränkter càg Prozess. Weiter sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riemann'sche Zerlegungsfolge.

i) Geben Sie den einfachen previsiblen Prozess H^n an, sodass $\tau_n(H \cdot X)_t = H^n \cdot X$. Dieser darf hier auch als Reihe dargestellt werden.

ii) Zeigen Sie, dass H^n punktweise gegen H konvergiert.

iii) Folgern Sie, dass die τ_n-Riemann'schen Approximationen $\tau_n(H \cdot X)_t$ gegen $H \cdot X$ in *ucp* konvergieren.

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Seien $X, Y \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass die quadratische Kovariation $[X, Y]$ von X und Y wie folgt approximiert werden kann: Sei $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Riemann'sche Zerlegungsfolge. Dann gilt

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_0} (X_{T_{n,m+1}\wedge\cdot} - X_{T_{n,m}\wedge\cdot})(Y_{T_{n,m+1}\wedge\cdot} - Y_{T_{n,m}\wedge\cdot}) \to [X, Y] \quad \text{in } ucp \text{ für } n \to \infty.$$

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage zunächst für die quadratische Variation $[X] \coloneqq [X, X]$ *und verwenden Sie dann die Polarisierungsformel*

$$[X, Y] = \tfrac{1}{2}[X + Y] - \tfrac{1}{2}([X] + [Y]).$$

Definition 3. Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ beliebig. Wir bezeichnen mit

i) $L^2(X)$ die Menge aller previsiblen Prozesse H, so dass $H^2 \cdot \langle X, X\rangle \in \mathcal{A}^+$.

ii) $L^2_{loc}(X)$ die Menge aller previsiblen Prozesse H, so dass $H^2 \cdot \langle X, X\rangle \in \mathcal{A}^+_{\text{loc}}$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Es sei $X \in \mathscr{H}^2_{loc}$ beliebig. Dann liegt jeder lokal beschränkte, previsible Prozess H in $L^2_{loc}(X)$.