## Stochastische Prozesse

**Wintersemester 2023/24**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

# Übungsblatt 7

**Abgabe: Freitag, 08.12.2023.**

**Aufgabe 1** (4 Punkte)**.** Zwei lokale Martingale $M, N \in \mathscr{M}_{loc}$ heißen orthogonal (wir schreiben $M \perp N$), falls $MN \in \mathscr{M}_{loc}$. Zeigen Sie:

i) Für ein lokales Martingal $M \in \mathcal{M}_{loc}$ gilt $M \perp M$ genau dann, wenn $M_0 \in L^2$ und $M = M_0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

ii) Es sei $M \in \mathcal{M}_{loc}$ ein rein unstetiges lokales Martingal mit stetigen Pfaden. Dann gilt $M = 0$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

**Aufgabe 2** (4 Punkte)**.** Es seien $M, N \in \mathcal{M}_{loc}$ zwei rein unstetige lokale Martingale mit $\Delta M = \Delta N$ bis auf Ununterscheidbarkeit. Dann gilt $M = N$ bis auf Ununterscheidbarkeit.

**Aufgabe 3** (4 Punkte)**.** Zeigen Sie

1. Die Zerlegung eines speziellen Semimartingals $X$ ist eindeutig.
2. Es gilt $\mathscr{M}_{loc} \subset \mathscr{S}_p$, $\mathscr{A}_{loc} \subset \mathscr{S}_p$ und $\mathscr{V} \subset \mathscr{S}$.

**Aufgabe 4** (4 Punkte)**.** Es seien $(H_1, d_1), (H_2, d_2)$ metrische Räume, $(H_2, d_2)$ vollständig und $D \subset H_1$ eine dichte Teilmenge von $H_1$. Weiter sei $f\colon D \subset H_1 \to H_2$ eine gleichmäßig stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige Abbildung $\tilde{f}\colon H_1 \to H_2$ gibt, sodass $\tilde{f}$ stetig ist und $\tilde{f}|_D = f$ gilt.

Zeigen Sie mit 3 Gegenbeispielen, dass folgende Annahmen notwendig sind

i) $(H_2, d_2)$ ist vollständig.

ii) $f$ ist gleichmäßig stetig.

iii) $D$ ist dicht in $H_1$.