Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 17.11.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $(X_t)_{t \in I}$ ein Submartingal bezüglich der Filtration $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, P)$. Weiter sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine fallende Folge in I. Falls $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von unten beschränkt oder X von unten abgeschlossen ist, dann ist $(X_{t_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig integrierbar.
Hinweis: Verwenden Sie Korollar 8.22 in [1].

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei X ein Submartingal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

1. Es gilt X^+ ist gleichgradig integrierbar.
2. Es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, sodass $E\left[X_\infty | \mathscr{F}_t\right] \geq X_t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Formulieren Sie eine analoge Aussage für Supermartingale.

Aufgabe 3. Es sei M ein adaptierter càdlàg-Prozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es gilt M ist ein gleichgradig integrierbares Martingal.

(ii) M besitzt einen Grenzwert $M_\infty \in L^1(\mathscr{F}_\infty)$, und es gilt $M_t = E[M_\infty \,|\, \mathscr{F}_t]$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

In diesem Fall gilt $M_t \to M_\infty$ in L^1 für $t \to \infty$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.**

i) Seien $Y_i,\ i = 1, 2, \ldots$ unabhängig identisch verteilt mit $P(Y_i = 0) = 1 - P(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X} = (X_n)_{n \geq 1}$ mit $X_n := 2^n \prod_{i=1}^n Y_i$ ein Martingal ist bzgl. einer geeigneten Filtration. Konvergiert dieses fast sicher bzw. in L^1?

ii) Sei $(Z_n)_{n \geq 1}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(Z_n = 1) = \frac{1}{n} = 1 - P(Z_n = 0)$. Zeigen Sie, dass die Folge in L^1 konvergiert, aber nicht fast sicher.

iii) Gibt es ein Martingal $X = (X_n)_{n \geq 1}$, das in L^1, aber nicht fast sicher konvergiert?

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.