Stochastische Prozesse **Wintersemester 2023/24**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 10.11.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{F}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und T und S Stoppzeiten. Zeigen Sie

i) $\mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S = \mathscr{F}_{T \wedge S}$.

ii) Für $Y \in L^1$ gilt $E\left[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathscr{F}_S\right] = E\left[Y \mathbb{1}_{\{S=T\}} | \mathscr{F}_T\right]$

iii) Für einen adaptierten càd-Prozess X gilt $E\left[X_t^T | \mathscr{F}_s\right] = E\left[X_t^T | \mathscr{F}_{T \wedge s}\right]$ für alle $s \leq t$.

Hinweis: Verwenden Sie Lemma 12. Außerdem dürfen Sie verweden, dass für einen adaptierten càd Prozess X und eine Stoppzeit T die Zufallsvariable $X_T \mathbb{1}_{\{T<\infty\}}$ messbar bezüglich $\mathscr{F}_T$ ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie das *Optional Sampling Theorem für beschränkte Stoppzeiten*: Sei X ein Supermartingal. Sind T und S Stoppzeiten, sodass $T, S \leq K < \infty$ für eine (deterministische) Konstante K. Dann folgt, dass X_T und X_S integrierbar sind und

$$X_S \geq E\left[X_T | \mathscr{F}_S\right] \quad \text{auf } S \leq T.$$

Hinweis: Dieses Resultat gilt auch für Submartingale (mit "$\leq$") und Martingale (mit "$=$").

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie das *Optional Stopping Theorem*: Sei T eine Stoppzeit und X ein $\mathbb{F}$-Supermartingal. Dann ist der gestoppte Prozess X^T wieder ein Supermartingal bzgl. der Filtrationen $\mathbb{F}$ und $\mathbb{F}^T = (\mathscr{F}_{T \wedge t})_{t \in \mathbb{R}+}$.

Hinweis: Dieses Resultat gilt analog auch für Submartingale und Martingale.

Definition 1. Ein *einfacher Prozess* H (in Finanzmathe auch: *einfache Handelsstrategie*) ist ein $\mathbb{R}^d$-wertiger adaptierter stochastischer Prozess der Form

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_i \mathbb{1}_{]\!]\tau_{i-1}, \tau_i]\!]}$$

für endliche Stoppzeiten $0 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \leq \cdots \leq \tau_n < \infty$ und $h_i \in L^\infty(\mathscr{F}_{\tau_{i-1}})$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition 2. Sei S ein $\mathbb{R}^d$-wertiger stochastischer Prozess und H ein einfacher Prozess nach Definition 1. Das *stochastische Integral für einfache Prozesse* $H \cdot S$ ist definiert durch

$$(H \cdot S)_t := \int_0^t H_s dS_s := \sum_{i=1}^{n} \langle h_i, S_t^{\tau_i} - S_t^{\tau_{i-1}} \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** i) Besitzt $(H \cdot S)$ einen terminalen Wert?

ii) Finden Sie eine Anschauung für $(H \cdot S)$ (der Einfachheit halber für $d = 1$). Wählen Sie beispielsweise $S_t = t$ oder fertigen Sie für allgemeine S eine Skizze an. Finden Sie Beispiele in der Realität, die durch ein stochastisches Integral beschrieben werden können.

iii) Zeigen Sie: Für ein Martingal S und einen einfachen Prozess H ist das stochastische Integral $H \cdot S$ auch ein Martingal.

Hinweis: Zeigen Sie die Aussage iii) für $d = 1$ und $H \cdot S = h(S^{T_2} - S^{T_1})$ für eine $\mathscr{F}_{T_1}$-messbare Zufallsvariable $h \in L^\infty$ und Stoppzeiten $T_2 \geq T_1$. Wieso genügt das? Um die vereinfachte Aussage zu zeigen, ist die Fallunterscheidung $1 = \mathbb{1}_{\{T_1 > s\}} + \mathbb{1}_{\{T_1 \leq s < T_2\}} + \mathbb{1}_{\{T_2 \leq s\}}$ sehr hilfreich.

Definition 3. Wir bezeichnen die Menge aller gleichgradig integrierbaren Martingale mit $\mathscr{M}$. Ein Prozess X heißt lokales Martingal, falls $X \in \mathscr{M}_{loc}$.

Aufgabe 5 (Bonus 2 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Jedes Martingal ist ein lokales Martingal.

ii) Bezeichnet man die Klasse aller Martingale mit $\mathscr{C}$, so gilt $\mathscr{C}_{loc} = \mathscr{M}_{loc}$.