UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse **WS 2023/2024**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 2

Abgabe: Freitag 20.11.20 um 18:00 Uhr an moritz.ritter@stochastik.uni-freiburg.de

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

i) Sei W eine Brownsche Bewegung. Dann ist W ein Martingal.

ii) Sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität $\Lambda(t) = \mathbb{E}[N_t]$. Dann ist der kompensierte Poisson-Prozess $N_t - \Lambda(t)_t$ ein Martingal.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Martingale M, dh. $E\left[M_t^2\right] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$, und $s \leq t$ folgende Aussagen gelten:

i) $E[(M_t - M_s)^2 \mid \mathscr{F}_s] = E[M_t^2 - M_s^2 \mid \mathscr{F}_s]$.

ii) $E[(M_t - M_s)^2] = E[M_t^2] - E[M_s^2]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie folgende Aussagen:

i) Jedes nicht-negative lokale Martingal ist ein Supermartingal.

ii) Sei X ein Martingal (Submartingal) und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (konvex und nicht fallend), so dass $E\left[|\varphi(X_t)|\right] < \infty$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\varphi(X)$ ein Submartingal.

Hinweis: Denken Sie daran, dass die bekannten Konvergenzsätze auch für den bedingten Erwartungswert gelten.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Geben Sie für einen wiederholten Münzwurf (mit fairer Münze) einen Wahrscheinlichkeitsraum an und zeigen Sie, dass der Prozess $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, der die Summe der Auszahlung $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von 1 bzw. -1 beschreibt, ein Martingal bzgl. seiner Filtration ist. Das Spiel endet, wenn die Auszahlung von $a \in \mathbb{N}$ erreicht ist. Ist das gestoppte Spiel immer noch ein Martingal? Was lässt sich über die Konvergenz (fast sicher und L^1) des gestoppten Spiels aussagen?

Hinweis: Sie dürfen für die Konvergenz ohne Beweis annehmen, dass $\limsup_{n\to\infty} M_n = \infty$ *fast sicher. Diese Aussage finden sie zum Beispiel in [1, Aufgabe 2.3.1].*

Aufgabe 5 (Bonus 4 Punkte)**.** Es sei $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine linksstetige Funktion. Wir definieren die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von rechtsstetigen Funktionen $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$f_n := \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \mathbb{1}_{\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)},$$

und die Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von linksstetigen Funktionen $g_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ durch

$$g_n := f(0)1_{\{0\}} + \sum_{k\in\mathbb{N}} f\left(\frac{k-1}{2^n}\right) \mathbb{1}_{\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right]}.$$

Dann gilt $f_n \to f$ und $g_n \to f$ punktweise. Was folgern Sie aus dieser Aufgabe? Kann man eine analoge Aussage für rechtsstetige Funktionen formulieren?

References

[1] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Vol. 1. Springer, 2006.