Stochastische Prozesse

Wintersemester 2023/24

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 9

Abgabe: Freitag, 22.12.2023.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie die Polarisierungsformel $[X,Y] = \frac{1}{4}([X+Y] - [X-Y])$.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.** Sei $X \in \mathscr{S}$ ein reellwertiger und stetiger Prozess.

i) Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Formulieren Sie die Itô-Formel für den Prozess $(f(X_t))_{t\geq 0}$.

ii) Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$. Formulieren Sie die Itô-Formel für den Prozess $(f(X_t,t))_{t\geq 0}$.

Aufgabe 3 (1 Punkt)**.** Sei $X \in \mathscr{S}$ ein reellwertiger Prozess mit stetig differenzierbaren Pfaden. Wenden Sie die Itô-Formel auf $f(X)$ mit $f = \mathrm{id}$ an. Was fällt Ihnen auf?

Definition 1 (Die Differentielle Schreibweise)**.** Wir vereinbaren folgende Notation, unter der Bedingung, dass alle Ausdrücke wohldefiniert sind. Wir schreiben

$$dX_t = H_t dt + K_t dY_t,$$

falls folgende Integraldarstellung gilt

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s ds + \int_0^t K_s dY_s.$$

Aufgabe 4 (1 Punkt)**.** Formulieren Sie die Lösung aus Aufgabe 2 in differentieller Schreibweise.

Aufgabe 5 (4 Punkte)**.** Sei W eine Standard Brown'sche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess

$$B_t = (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s$$

folgende Gleichung erfüllt

$$dB_t = -\frac{B_t}{1-t}dt + dW_t$$

und zeigen Sie, dass $\lim\limits_{t\nearrow 1} E[B_t] = 0$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Es seien F und G stetige Funktionen und f die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $f'(t) = F(t)f(t)$ mit $f(0) = 1$. Ferner sei W eine Brownsche Bewegung. Zeigen Sie, dass der Prozess X gegeben durch

$$X_t := f(t)(x + \int_0^t f(s)^{-1} G(s) dW_s)$$

folgende Darstellung besitzt

$$dX_t = F(t)X_t dt + G(t)dW_t, \quad X_0 = x.$$