Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 13

Abgabetermin: Donnerstag, 01.02.2024, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die inverse Matrix A^{-1} von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R}).$$

HINWEIS: Überlegen Sie sich, dass die i-ten Spalte b_i von A^{-1} gerade das LGS $Ab_i = e_i$ löst.

(b) Wiederholen Sie Teil (a), wobei diesmal $A \in M(4 \times 4, F_5)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Betrachten Sie die lineare Abbildung $\tilde{A} : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ welche durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, \mathbb{R})$$

mittels $x \mapsto Ax$ induziert wird.

(a) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern}(\tilde{A})$ und von $\operatorname{Bild}(\tilde{A})$.

(b) Ist $\tilde{A}$ injektiv/surjektiv?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung, welche gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4x + y - 2z \\ -y + z \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix von F bezüglich der Standardbasis.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix M_C^B von F, wobei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und V, W zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Bestimmen Sie die Dimension des Raumes aller linearer Abbildungen $f : V \longrightarrow W$, also $\dim_K(\mathrm{Hom}_K(V, W))$ und geben Sie eine Basis dieses Vektorraums an.

Aufgabe 5 (4 Bonuspunkte)

Es seien V, W endlich-dimensionale K-Vektorräume mit $V = V_1 \oplus V_2$ und $W = W_1 \oplus W_2$ sowie $F : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung mit $F(V_i) \subset W_i$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass es Basen B von V und B' von W gibt, sodass die Darstellungsmatrix $M^B_{B'}$ von F die Form

$$M^B_{B'} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

hat, wobei $A \in M(\dim_K(W_1) \times \dim_K(V_1), K)$ und $A' \in M(\dim_K(W_2) \times \dim_K(V_2), K)$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Beschreiben Sie $\text{Lös}(A, 0)$ und $\text{Lös}(A, b)$ geometrisch.

(ii) Wodurch ist die Dimension von $\text{Lös}(A, b)$ bestimmt?

(iii) Was unterscheidet die *strenge* Zeilenstufenform von der Zeilenstufenform?

(iv) Sei $A \in M(5 \times 5, \mathbb{R})$ eine Matrix mit $\text{Rang}(A) = 5$. Wie viele Lösungen hat $Ax = b$?

(v) Was versteht man unter einem *Koordinatensystem*?