Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 12

Abgabetermin: Donnerstag, 25.01.2024, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}_K(V)$ mit $f \circ f = f$. Zeigen Sie, dass

(a) $V = \mathrm{Kern} f \oplus \mathrm{Bild} f$,

(b) $\mathrm{Kern} f = \mathrm{Bild}(id_V - f)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für Mengen A, B, C mit $A \subset B$ und Abbildungen $f : A \longrightarrow C$, $g : B \longrightarrow C$ schreiben wir $g|_A = f$ genau dann, wenn $g(a) = f(a)$ für alle $a \in A$.

(a) Es seien $V = U_1 \oplus U_2$ und W zwei K-Vektorräume und $f_1 : U_1 \longrightarrow W$ und $f_2 : U_2 \longrightarrow W$ zwei lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow W$ gibt mit $f|_{U_1} = f_1$ und $f|_{U_2} = f_2$.

(b) Es sei V ein K-Vektorraum. Weiter seien U_1, U_2 zwei Untervektorräume von V, sodass für je zwei lineare Abbildungen $f_1 : U_1 \longrightarrow V$ und $f_2 : U_2 \longrightarrow V$ genau eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit $f|_{U_1} = f_1$ und $f|_{U_2} = f_2$ gibt. Zeigen Sie, dass dann $V = U_1 \oplus U_2$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $F \in \mathrm{Hom}_K(V, K)$, sowie $v \in V$ mit $v \notin \mathrm{Kern} F$. Zeigen Sie, dass

$$V = \mathrm{Kern} F \oplus \{\lambda v \mid \lambda \in K\}.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{R}[t]_k := \{P \in \mathbb{R}[t] \mid \deg(P) \leq k\} \cup \{0\}$ (vgl. Blatt 8, Aufgaben 4). Sei nun $P \in \mathbb{R}[t]_{n-1}$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass ein Polynom $Q \in \mathbb{R}[t]_n$ existiert mit $P(t) = Q(t+1) - Q(t)$.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $F : \mathbb{R}[t]_n \longrightarrow \mathbb{R}[t]_{n-1}$ mit $p \mapsto q$, wobei das Polynom q gegeben ist durch $q(t) = p(t+1) - p(t)$. Überlegen Sie sich auch, dass diese wohldefiniert ist.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Es sei $f : V \longrightarrow W$ linear. Zeigen Sie, dass $f(0_V) = 0_W$.

(ii) Definieren Sie *Kern* und *Bild* einer linearen Abbildung.

(iii) Es sei $f : V \longrightarrow W$ linear mit $\mathrm{Kern} f = \{0\}$. Zeigen Sie, dass f injektiv ist.

(iv) Was besagt die Dimensionsformel für lineare Abbildungen?

(v) Welche Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$ sind isomorph zu $\mathbb{R}^3$?

(vi) Beschreiben Sie die affinen Unterräume des $\mathbb{R}^3$.