# Übungen zur Vorlesung
# “Lineare Algebra I“

## Blatt 10

**Abgabetermin:** Donnerstag, 11.01.2024, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

### Aufgabe 1 (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Basis von $Lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ -3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 15 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 18 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Stellen Sie die folgende Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Elementarmatrizen dar.

(b) Bestimmen Sie den Zeilenrang von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4, K)$$

jeweils für $K = \mathbb{Q}$ und $K = F_5$.

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, U_2$ Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$U_1 = \{(a, a, \ldots, a) \in \mathbb{R}^n \mid a \in \mathbb{R}\},$$
$$U_2 = \left\{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \right\}.$$

Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U_1), \dim_{\mathbb{R}}(U_2), \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)$ sowie $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2)$.

Hinweis: Sie müssen nicht nachrechnen, dass es sich bei $U_1$ und $U_2$ tatsächlich um Untervektorräume handelt.

(bitte wenden)

**Aufgabe 4** (4 Punkte)

Betrachten Sie die Mengen

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \\ U &= \{f \in V \mid f(-x) = -f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\} \text{ und} \\ G &= \{f \in V \mid f(-x) = f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie, dass $U$ und $G$ Untervektorräume von $V$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass $U \oplus G = V$.

**Aufgaben zur Selbstkontrolle**

(i) Wie ändert sich der Zeilenraum einer Matrix durch Multiplikation mit einer Elementarmatrix?

(ii) Erklären Sie in eigenen Worten, wie das Gauß'sche Eliminationsverfahren funktioniert.

(iii) Wie bestimmt man den Spaltenrang einer Matrix?

(iv) Bestimmen Sie den Zeilenrang von

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(v) Definieren Sie die *Summe* und *direkte Summe* zweier Untervektorräume $U, W \subset V$. Was ist der Unterschied?

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten

und einen guten Start ins neue Jahr!