Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 9

Abgabetermin: Donnerstag, 21.12.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Produkte $A_i \cdot A_j$ für $1 \leq i, j \leq 3$, welche wohldefiniert sind, wobei

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

Fassen Sie dabei alle Einträge der Matrizen als reelle Zahlen auf.

(b) Es sei K ein Körper und $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in K$. Bestimmen Sie die Produkte

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdots a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \cdots b_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in M(n \times n, K)$.

(a) Zeigen Sie, dass A genau dann invertierbar ist, wenn A^t invertierbar ist und in diesem Falle $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

(b) Zeigen Sie, dass $O(n, K) := \{A \in GL(n, K) \mid A^{-1} = A^t\}$ eine Untergruppe von $GL(n, K)$ bildet.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \in K$ und $B \in M(n \times n, K)$ gilt, dass $(\lambda E_n)B = B(\lambda E_n)$.

(b) Zeigen Sie: Ist $A \in M(n \times n, K)$ mit $AB = BA$ für alle $B \in M(n \times n, K)$, so existiert ein $\lambda \in K$ mit $A = \lambda E_n$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M(n \times n, K)$ heißt *echte obere Dreiecksmatrix*, falls die Einträge $a_{ij} = 0$ für $i \geq j$. Zeigen Sie, dass für eine echte obere Dreiecksmatrix A ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, mit $A^m = 0 \cdot E_n$, wobei A^m die m-fache Matrixmultiplikation von A mit sich selbst bezeichnet.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie die Matrixmultiplikation $A \cdot B$ für Matrizen A, B. Welche Zeilen- und Spaltenanzahl müssen A und B dabei haben, damit $A \cdot B$ wohldefiniert ist?

(ii) Gilt $A \cdot B = B \cdot A$ für Matrizen $A, B \in M(n \times n, K)$?

(iii) Bildet $M(n \times n, K)$ mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe?

(iv) Was versteht man unter der *allgemeinen linearen Gruppe*?

(v) Welche *elementaren Zeilenumformungen* kennen Sie?