Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 7

Abgabetermin: Donnerstag, 07.12.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und $v \in K^2$ mit $v \neq 0$. Zeigen Sie, dass $a, b \in K$ mit $(a,b) \neq (0,0)$ existieren, sodass

$$Lin(\{v\}) = \left\{(x,y) \in K^2 \mid ax + by = 0\right\}.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \dots, v_n \in V$.

(a) Es sei $\lambda \in K \setminus \{0\}$ und $1 \leq i \leq n$. Zeigen Sie, dass

$$Lin(\{v_1, \dots, v_n\}) = Lin(\{v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\})$$

und falls $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, so auch $(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

(b) Es sei $\lambda \in K$ und $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Zeigen Sie, dass

$$Lin(\{v_1, \dots, v_n\}) = Lin(\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \dots, v_n\})$$

und falls $(v_1, \dots, v_n)$ linear unabhängig ist, so auch $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + \lambda v_j, v_{i+1}, \dots, v_n)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Überprüfen Sie die folgenden Familien von Vektoren auf lineare Unabhängigkeit:

(a) $((1,2,3), (4,5,6), (7,8,9))$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

(b) $((0,1,1), (1,0,1), (1,1,0))$ im F_2-Vektorraum F_2^3 und im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$.

(c) $\left(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$.
Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und M eine Menge. Für $m \in M$ definieren wir $\mathbb{1}_m \in Abb(M, K)$ durch

$$\mathbb{1}_m(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x = m, \\ 0, & \text{falls } x \neq m. \end{cases}$$

Sei weiter $B = (\mathbb{1}_m)_{m \in M}$. Zeigen Sie:

(a) Die Familie B ist linear unabhängig.

(b) Ist M endlich, so ist B eine Basis von $Abb(M, K)$.

(c) Ist M unendlich, so ist B keine Basis von $Abb(M, K)$.

(d) Es sei wieder M unendlich. Welche Abbildungen liegen in der linearen Hülle von B?

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Was versteht man unter einer *Linearkombination* von $v_1, \ldots, v_n$?

(ii) Es sei V ein K-Vektorraum und $M \subset V$. Definieren Sie die *lineare Hülle* $Lin(M)$ von M für endliches und unendliches M.

(iii) Ist $(1, 1, 1, \ldots) \in Lin(\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\})$?

(iv) Gilt $(3, 5) \in Lin(\{(0, 1), (2, 2)\})$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$?

(v) Definieren Sie, wann Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ *linear unabhängig* sind.

(vi) Definieren Sie die Begriffe *Erzeugendensystem* und *Basis*. Was ist der Zusammenhang, was der Unterschied?