Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 6

Abgabetermin: Donnerstag, 30.11.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$ ein komplexe Zahl. Wir definieren die *konjugierte* komplexe Zahl $\overline{z}$ durch $\overline{z} := a - bi$.

(a) Zeigen Sie, dass für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \text{und} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

(b) Es sei $P \in \mathbb{R}[t]$ und $z \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von P, d.h. $P(z) = 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $P(\overline{z}) = 0$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{R}[t]$ ein nicht-konstantes Polynom. Zeigen Sie, dass ein $k \in \mathbb{N}$ und Polynome $p_1, \ldots p_k \in \mathbb{R}[t]$ existieren mit $deg(p_i) \in \{1, 2\}$ für alle $1 \leq i \leq k$ und

$$P = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k,$$

d.h. zeigen Sie, dass sich jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{R}[t]$ als Produkt von Polynomen vom Grad 1 und 2 mit reellen Koeffizienten schreiben lässt.
Hinweis: Nutzen Sie Aufgabe 1(b).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum von V. Für Elemente $u, v \in V$ setzen wir $u - v := u + (-v)$ und definieren

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad u - v \in W.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf V definiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Addition $+ : (V/\sim) \times (V/\sim) \to V/\sim, ([u],[v]) \mapsto [u+v]$, sowie die skalare Multiplikation $\cdot : K \times (V/\sim) \to V/\sim, (\lambda, [u]) \mapsto [\lambda v]$ wohldefiniert sind und dass $V/\sim$ mit diesen einen K-Vektorraum bildet. Dieser wird oft auch mit V/W bezeichnet und *Quotienten(vektor)raum* genannt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir nutzen die Notation von Aufgabe 3. Es sei V ein K-Vektorraum und $W \subset V$ ein Untervektorraum von V. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung

$$\{U \subset V \mid U \text{ ist UVR von } V \text{ und } W \subset U\} \longrightarrow \{U' \subset V/W \mid U' \text{ ist UVR von } V/W\}.$$

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was besagt der *Fundamentalsatz der Algebra*?

(ii) Definieren Sie den Begriff *Vektorraum*.

(iii) Was versteht man unter einem *Untervektorraum*?

(iv) Geben Sie eine Addition und skalare Multiplikation an, sodass $\mathbb{R}[t]$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum wird.

(v) Ist $\mathbb{R}[t]_n := \{0\} \cup \{P \in \mathbb{R}[t] \mid deg(P) \leq n\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[t]$?

(vi) Handelt es sich bei $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 2z + 1\}$ um einen (Unter-)vektorraum?