Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 5

Abgabetermin: Donnerstag, 23.11.2023, bis 10.30 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei R ein Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Der Polynomring $(R[t], +, \cdot)$ ist ein Ring.

(b) Ist R kommutativ, so auch $R[t]$.

(c) Ist R nullteilerfrei, so gilt $deg(P \cdot Q) = deg(P) + deg(Q)$ für $P, Q \in R[t]$ (wobei die Konvention $n + \infty = \infty + m = \infty + \infty = \infty$ für $m, n \in \mathbb{N}_0$ genutzt wird).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Führen Sie eine Polynomdivision durch, um in der Darstellung $P(t) = q(t)Q(t) + r(t)$ aus Satz 2.34 die Polynome q und r zu bestimmen, falls

(a) $P(t) = 8t^3 + 12t^2 + 4t - 3$, $Q(t) = 2t + 5$ und $P, Q \in \mathbb{R}[t]$.

(b) $P(t) = t^7 + 3t^6 + t^3 + 4t + 5$, $Q(t) = 2t^3 + 5$ und $P, Q \in F_7[t]$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei $R[t]$ der Polynomring über dem Ring R und $T \in R[t]$ fest gewählt Dann definieren wir für zwei Polynome $P, Q \in R[t]$

$$P \sim_T Q \quad \Leftrightarrow \quad \text{es gibt ein Polynom } q \in R[t] \text{ mit } P - Q = q \cdot T.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim_T$ eine Äquivalenzrelation definiert.

Wir schreiben von nun an $R[t]/(T) := R[t]/\sim_T$ für die Menge der Äquivalenzklassen.

(b) Es sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie, dass $(R[t]/(T), +_T, \cdot_T)$ ein kommutativer Ring mit Eins ist, wobei

$$[P] +_T [Q] = [P + Q] \quad \text{und} \quad [P] \cdot_T [Q] = [P \cdot Q].$$

Stellen Sie insbesondere sicher, dass diese Operationen wohldefiniert sind.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir nutzen weiterhin die Notation aus Aufgabe 3.

(a) Ist $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ nullteilerfrei? Begründen Sie.

(b) Ist $\mathbb{R}[t]/(t^2-1)$ ein Körper? Begründen Sie.

(c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}[t]/(t^2+1)$ ein Körper ist.

(d) Konstruieren Sie einen bijektiven Körperhomomorphismus ϕ (ein sogenannter *Körperisomorphismus*) $\phi : \mathbb{R}[t]/(t^2+1) \to \mathbb{C}$. Für die Definition des Körperhomomorphismus, vgl. Blatt 4, Aufgabe 4.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Was versteht man unter einem *Polynom über* R?

(ii) Warum unterscheidet man zwischen einem Polynom P und der induzierten Abbildung $\lambda \mapsto P(\lambda)$?

(iii) Was versteht man unter dem *Grad* eines Polynoms?

(iv) Wie viel Nullstellen hat das Polynom $P(t) = t^9 - 4t^6 - 13t^2 + 2$ höchstens?

(v) Was ist die Kernidee der Beweismethode der vollständigen Induktion? Zeigen Sie mit dieser, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$