Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 2

Abgabetermin: Donnerstag 02.11.2023, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien M_1, M_2 und N_1, N_2 Mengen. Zeigen Sie, dass

$$(M_1 \times M_2) \setminus (N_1 \times N_2) = ((M_1 \cap N_1) \times (M_2 \setminus N_2)) \cup ((M_1 \setminus N_1) \times M_2)\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es seien M, N Mengen, $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung und $A \subset M$, sowie $B, B_1, B_2 \subset N$.

(a) Zeigen Sie, dass $A \subset f^{-1}(f(A))$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

(c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

(d) Geben Sie je ein Beispiel an, für das in (a) bzw. (b) keine Gleichheit gilt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei M eine Menge und $\sim_1$, $\sim_2$ zwei Äquivalenzrelationen auf M.

(a) Die Relation $\sim$ sei definiert durch die Eigenschaft, dass für $m, n \in M$

$$m \sim n \quad \Longleftrightarrow \quad m \sim_1 n \text{ und } m \sim_2 n.$$

Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist.

(b) Es bezeichne $[m], [m]_1, [m]_2$ die Äquivalenzklasse von $m \in M$ bezüglich $\sim$, $\sim_1$ bzw. $\sim_2$. Zeigen Sie, dass

$$[m] = [m]_1 \cap [m]_2.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei eine Relation $\sim$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert durch die Vorschrift, dass für $(m, n), (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$(m, n) \sim (p, q) \quad \Longleftrightarrow \quad m + q = n + p.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert.

(b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $[(1, 1)], [(3, 4)]$ und $[(7, 2)]$.

(c) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim\, \longrightarrow \mathbb{Z}$.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Definieren Sie das *kartesische Produkt* $M \times N$ für zwei Mengen M und N.

(ii) Es seien M, N Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung, sowie $A \subset M$ und $B \subset N$. Definieren Sie das *Bild* $f(A)$ sowie das *Urbild* $f^{-1}(B)$.

(iii) Es sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $n \mapsto n^2$. Bestimmen Sie $f^{-1}(\{1, 2, 3, \ldots, 10\})$.

(iv) Definieren Sie den Begriff *Äquivalenzrelation*.

(v) Handelt es sich bei der Relation '$m \sim n \Leftrightarrow m - n$ ist teilber durch zwei' auf $\mathbb{Z}$ um eine Äquivalenzrelation? Falls ja, wie viele Äquivalenzklassen gibt es?