Übungen zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Blatt 1

Abgabetermin: Donnerstag, 26.10.2023, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut. (Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es seien L, M und N Mengen. Zeigen Sie:

(a) Ist $L \subset M$ und $M \subset N$, so gilt auch $L \subset N$. Man spricht auch davon, dass $\subset$ *transitiv* ist.

(b) Es gilt $M \cap (M \cup N) = M$. Diese Regel heißt auch *Absorption*.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität:

(a) $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = n^2$.

(b) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(n) = n^2$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$.

(d) $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ mit $f(z) = \begin{cases} -2z, & \text{falls } z \leq 0, \\ 2z - 1, & \text{falls } z > 0. \end{cases}$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es seien L, M und N Mengen, sowie $f : L \longrightarrow M$ und $g : M \longrightarrow N$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Sind f und g beide injektiv, so ist die Verkettung $g \circ f : L \longrightarrow N$ injektiv.

(b) Sind f und g beide surjektiv, so ist die Verkettung $g \circ f : L \longrightarrow N$ surjektiv.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien M, N Mengen und $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Weiter seien $M_1, M_2 \subset M$ Teilmengen und $f(A)$ sei definiert als die Menge $\{f(a) : a \in A\} \subset N$ für eine Teilmenge $A \subset M$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$.

(b) Zeigen Sie, dass $f(M_1 \cap M_2) \subset f(M_1) \cap f(M_2)$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an, für das in (b) die strikte Inklusion $\subsetneq$ gilt.

(bitte wenden)

Aufgaben zur Selbstkontrolle

(i) Es seien M, N Mengen. Definieren Sie den Schnitt $M \cap N$, die Vereinigung $M \cup N$ und die Differenz $M \setminus N$. Veranschaulichen Sie sich diese Mengen graphisch.

(ii) Definieren Sie, wann eine Funktion $f : M \longrightarrow N$ injektiv/surjektiv/bijektiv ist.

(iii) Es sei M eine beliebige Menge. Welche der Eigenschaften injektiv/surjektiv/bijektiv erfüllt die Identität $f : M \longrightarrow M$ mit $f(m) = m$.

(iv) Was bedeutet es, dass die Verkettung von Abbildungen assoziativ ist?

(v) Es sei $f : M \longrightarrow N$ eine Abbildung. Was versteht man unter der Umkehrabbildung f^{-1}?