Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 5

Abgabetermin: Dienstag, 21.11.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Seien ξ ein endliches signiertes Maß und R ein σ-endliches Maß auf einem Messraum $(X, \mathcal{X})$, sodass $\xi \ll R$.

a) Beweisen Sie unter den oben genannten Voraussetzungen die Exitenz der Hahn Zerlegung für das signierte Maß ξ (siehe Blatt 4 Aufgabe 3).

b) Zeigen Sie $\|\xi\|_{TV} = \int \left|\frac{d\xi}{dR}\right| dR$.

c) Seien μ und ψ endliche Maße (nicht notwendigerweise singulär), sodass $\xi = \mu - \psi$. Zeigen Sie folgende Gleichheit

$$\|\xi\|_{TV} = \mu(X) + \psi(X) - 2 \inf \sum_i \min\Big(\mu(A_i), \psi(A_i)\Big),$$

wobei das Infimum über alle endlichen Zerlegungen von X in $\mathcal{X}$ -messbare Mengen A_i läuft.

d) Gilt zusätzlich $\mu \ll R$ und $\psi \ll R$, so zeigen Sie

$$\|\xi\|_{TV} = \mu(X) + \psi(X) - 2 \int \min\Big(\frac{d\mu}{dR}, \frac{d\psi}{dR}\Big) dR.$$

e) Zeigen Sie nun die Darstellungen der Totalvariation für die Differenz zweier Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P} - \mathbb{Q}$ aus Abschnitt 2.2.2 im Skript.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\min(a, b) = \frac{1}{2}(a + b - |a - b|)$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $(X, \mathcal{X})$ ein Messraum und $Q\colon X \times \mathcal{X} \to [0, 1]$ ein Markovkern. Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Existiert eine stationäre Verteilung, so muss diese nicht notwendigerweise eindeutig sein.

b) Ist $|X| < \infty$, so existiert eine stationäre Verteilung.

Hinweis: Sie können den Markovkern als stochastische Matrix A schreiben und verwenden, dass A und $A^\top$ die gleichen Eigenwerte haben. Zeigen sie dann, dass $(1, \dots, 1)^\top$ ein Eigenvektor von $A^\top$ ist.

c) Gilt $|X| = \infty$, so existiert ein Markovkern, welcher keine stationäre Verteilung besitzt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Finden Sie Zufallsvariablen X_1 und Y_1 auf $(X, \mathcal{X})$ beziehungsweise $(Y, \mathcal{Y})$, sodass der Markovkern G gegeben durch

$$\begin{aligned} G\colon X \times \mathcal{Y} &\to [0,1] \\ (x, B) &\mapsto P^{Y_1|X_1=x}(B) \end{aligned}$$

nicht Definition 1.11 erfüllt. Finden Sie damit ein Gegenbeispiel zu Blatt 4 Aufgabe 2, wenn die nicht-Degeneriertheit von G nicht vorausgesetzt wird.