Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 3

Abgabetermin: Dienstag, 7.11.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wir möchten die bedingte Verteilung $\mathbb{P}^{(X_0,\ldots,X_N)|(Y_0,\ldots,N_N)}$ des gesamten Signalpfades $X_0, \ldots, X_N$ gegeben die Beobachtungen $Y_0, \ldots, Y_N$ untersuchen.

(a) Zeigen Sie, dass das Signal $(X_k)_{0\leq k\leq N}$ ein inhomogener Markovprozess unter der bedingten Verteilung $\mathbb{P}^{(X_0,\ldots,X_N)|(Y_0,\ldots,Y_N)=(y_0,\ldots,y_N)}$ ist.

(b) Geben Sie explizite Ausdrücke für die Übergangskerne an (*Hinweis:* Filterrekursion).

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Beweisen Sie, dass der Ausdruck $\int \beta_{k|N}(x, y_{k+1}, \ldots, y_N)\sigma_k((y_0, \ldots, y_k), dx)$ in Satz 2.4 der Vorlesung nicht von k abhängt und damit gleich $\sigma_N((y_0, \ldots, y_N), X)$ ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Wir betrachten die Situation aus Beispiel 1.7 der Vorlesung, die Beobachtungen Y_k sind nun aber mit einer Zeitverzögerung gegeben: $Y_0 := 0$, $Y_k := h(X_{k-1}, \eta_k)$, $k \geq 1$. Im Sinne unserer Definition 1.5 ist $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$ nun kein Hidden-Markov-Modell mehr, aber eine Theorie kann hierfür sinngemäß entwickelt werden. Leiten Sie die Filter- und Glättungsrekursionen in Analogie zur Vorlesung für diese Situation her.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Seien $X = \mathbb{R}^p$, $Y = \mathbb{R}^q$ und $X_k = a + AX_{k-1} + B\xi_k$, $Y_k = c + CX_k + D\eta_k$, wobei $a \in \mathbb{R}^p$, $c \in \mathbb{R}^q$, A und B $(p\times p)$-Matrizen, C eine $(q\times p)$-Matrix und D eine $(q\times q)$-Matrix sind. Weiter seien $(\xi_k)_{k\geq 1}$ und $(\eta_k)_{k\geq 0}$ unabhängige iid-Folgen mit $\xi_1 \sim \mathcal{N}(0, Id_{p\times p})$ und $\eta_0 \sim \mathcal{N}(0, Id_{q\times q})$, $X_0 \sim \mathcal{N}(\mu_0, p_0)$. Schließlich sei D noch invertierbar, um die Nicht-Degeneriertheitsannahme sicherzustellen.

(a) Beweisen Sie, dass die bedingten Verteilungen $\pi_{k|N}$ $(k \leq N)$ sämtlich gaußisch sind.

(b) Seien $\widehat{X}_k$ und $\widehat{\Sigma}_k$ Erwartungswert und Kovarianzmatrix von $\pi_{k|k}$. Ermitteln Sie eine Rekursion für $(\widehat{X}_k, \widehat{\Sigma}_k)$ in Ausdrücken von $(\widehat{X}_{k-1}, \widehat{\Sigma}_{k-1})$ und Y_k mithilfe von Satz 2.2 der Vorlesung. Hierfür können Sie folgende Identität verwenden:

$$(\Sigma^{-1} + C^t(DD^t)^{-1}C)^{-1} = \Sigma - \Sigma C^t(DD^t + C\Sigma C^t)^{-1}C\Sigma.$$

Die Rekursion für $(\widehat{X}_k, \widehat{\Sigma}_k)$ heißt *Kalman-Filter.*