Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 11

Abgabetermin: Dienstag, 16.01.2024, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(i) Seien P und Q zwei beliebige Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $P \ll Q$, und sei $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ eine Sub-σ-Algebra. Zeigen sie: für die Restriktionen der Maße auf $\mathcal{G}$ gilt $P_{\mathcal{G}} \ll Q_{\mathcal{G}}$ mit

$$\frac{dP_{\mathcal{G}}}{dQ_{\mathcal{G}}} = E_Q\Big[\frac{dP}{dQ} \mid \mathcal{G}\Big].$$

(ii) Sei Θ eine Parametermenge. Wir betrachten nun eine Familie von HMM mit Tripletts $(\nu_\theta, Q_\theta, G_\theta)_{\theta \in \Theta}$ derart, dass die EM-Annahme gelte. Zeigen sie für $\theta, \theta' \in \Theta$, dass

$$\mathbb{P}_\theta^{Y_0,\dots,Y_N} \ll \mathbb{P}_{\theta'}^{Y_0,\dots,Y_N}$$

und bestimmen sie die zugehörige Dichte.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Wir betrachten ein nicht-degeneriertes HMM. Bestimmen sie für $N \in \mathbb{N}$ und $k \leq N$ ähnlich zur Filterrekursion eine Darstellung für die bivariate bedingte Verteilung $\mathbb{P}^{X_{k-1},X_k|Y_0,\dots,Y_N}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ eine abzählbare Teilmenge.

(i) Sei ν ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $\nu(\bigcup_n \{x_n\}) = 1$. Zeigen sie, dass dann $a_n \geq 0$ existieren mit $\sum_n a_n = 1$ und

$$\nu = \sum_n a_n \delta_{x_n}.$$

(ii) Seien $a_n \geq 0$ mit $\sum_n a_n = 1$. Bestimmen sie alle Wahrscheinlichkeitsmaße ν auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\nu(A) \leq \sum_n a_n \delta_{x_n}(A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$