Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 6

Abgabetermin: Dienstag, 28.11.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Auf diesem Übungsblatt haben Sie die Möglichkeit, 4 Bonuspunkte zu erzielen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $|X| < \infty$ und Q ein Übergangskern auf $(X, \mathcal{X})$. Zeigen Sie:

a) Gilt $Q(x, \{x'\}) > 0$ für alle $x, x' \in X$, so folgt, dass Q der starken Doeblin-Bedinung genügt.

b) Existiert ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $Q^m(x, \{x'\}) > 0$ für alle $x, x' \in X$, so genügt (Q^m) der starken Doeblin-Bedingung. Insbesondere genügt Q dann der Doeblin-Bedingung.

Aufgabe 2 (4+2* Punkte)

Sei $(U_k)_{k\geq 1}$ eine iid-Folge von Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Sei $(X_k)_{k\geq 0}$ die Markovkette mit Zustandsraum $X = \{0, 1, 2, 3\}$, welche durch die Rekursion $X_k = (X_{k-1} + U_k) \mod 4$ sowie $X_0 \sim \nu$ für ein W-Maß ν auf der Potenzmenge von X gegeben ist. Sei weiter $Y_k := 1_{\{0,2\}}(X_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie:

(i) $(X_k, Y_k)_{k\geq 0}$ ist ein Hidden Markov Model (HMM).

(ii) Untersuchen Sie den Übergangskern Q von $(X_k)_{k\geq 0}$ auf die Doeblin-Bedingung für $m = 1, 2, 3, 4$. Folgern Sie die gleichmäßige Ergodizität von $(X_k)_{k\geq 0}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 1. Sie dürfen beliebige Hilfsmittel zum Potenzieren von Matrizen verwenden.

(iii*) $\|\pi_{\nu,k|k} - \pi_{\nu',k|k}\|_{TV} = \|\pi_{\nu,0|0} - \pi_{\nu',0|0}\|_{TV}$ mit

$$\pi_{\nu,0|0}(\{j\}|y_0) = \begin{cases} \frac{y_0\nu(\{j\})}{\nu(\{0\})+\nu(\{2\})}, & \text{falls } j = 0, 2, \\ \frac{(1-y_0)\nu(\{j\})}{\nu(\{1\})+\nu(\{3\})}, & \text{falls } j = 1, 3. \end{cases}$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst mit Hilfe von Bemerkung 2.3, dass mit $y_{0:k} := (y_0, \ldots, y_k)$ folgende Gleichheiten gelten:

$$\begin{aligned}
\pi_{\nu,k|k}[y_{0:k}](0) &= y_k \left(\pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](0) + \pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](3)\right), \\
\pi_{\nu,k|k}[y_{0:k}](1) &= (1 - y_k) \left(\pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](1) + \pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](0)\right), \\
\pi_{\nu,k|k}[y_{0:k}](2) &= y_k \left(\pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](2) + \pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](1)\right), \\
\pi_{\nu,k|k}[y_{0:k}](3) &= (1 - y_k) \left(\pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](3) + \pi_{\nu,k-1|k-1}[y_{0:k-1}](2)\right).
\end{aligned}$$

Dazu kann es hilfreich sein, die Kerne Q und G mit stochastischen Matrizen zu identifizieren.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien $\alpha, \sigma^2 \in (0, \infty)$. Wir betrachten den Übergangskern eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses gegeben durch

$$Q_t(x, \cdot) := \mathcal{N}\Big(xe^{-\alpha t}, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\Big)$$

für $t > 0$ und $Q_0(x, \cdot) := \delta_x$. Zeigen Sie:

i) Für $s, t \geq 0$ gilt $Q_s Q_t = Q_{t+s}$.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 für $\nu = Q_s(x, \cdot)$, $x \in \mathbb{R}$ und die üblichen Rechenregeln für normalverteilte Zufallsvariablen.

ii) Zeigen Sie, dass $Q := Q_1$ nicht der starken Doeblin-Bedingung genügt.

Hinweis: Diese Aussage soll direkt und nicht mit Hilfe von iii) gezeigt werden.

iii) Zeigen Sie, dass Q nicht der Doeblin-Bedingung genügt.

Hinweis: Gehen Sie dabei wie folgt vor: Finden Sie zunächst ein invariantes Maß π für Q. Dieses ist wieder eine Normalverteilung. Verwenden Sie hierzu Aufgabe 4 um Ihre Rechnungen zu vereinfachen. Zeigen Sie nun, dass die Markovkette mit Übergangskern Q und Startverteilung π nicht gleichmäßig ergodisch ist und folgern Sie die zu zeigende Aussage.

Aufgabe 4 (2* Punkte)

Seien X_0, X_1 unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $(X, \mathcal{X})$. Weiter sei $g\colon X \times X \to \mathbb{R}$ messbar, Q ein Übergangskern auf $(X, \mathcal{X})$ und ν ein Maß auf X. Zeigen Sie: Sind $g(x_0, X_1) \sim Q(x_0, \cdot)$ für alle $x_0 \in X$ und $X_0 \sim \nu$ so folgt $g(X_0, X_1) \sim \nu Q$.