Übungen zur Vorlesung „Hidden Markov Models“

Blatt 8

Abgabetermin: Dienstag, 12.12.2023, bis 14:15 Uhr in der Vorlesung.
(Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Für die folgenden drei Übungsaufgaben seien μ, ν Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(X, \mathcal{X})$, sodass $\nu \ll \mu$ mit Dichte $\varrho := d\nu/d\mu$. Weiter seien $\xi^1, \xi^2, \ldots$ eine *iid* nach μ verteilte Folge von Zufallsvariablen und $f \in L^1(\nu)$. Wir definieren den Schätzer $\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f)$ durch

$$\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\xi^i)\frac{d\nu}{d\mu}(\xi^i).$$

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f)$ ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für $\nu(f)$ ist und berechnen Sie dessen Varianz.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $Z \sim \nu$ und $L := D(\nu||\mu)$ die Kullback-Leibler-Divergenz von μ zu ν, das heißt,

$$L = D(\nu||\mu) = \int_X \log\big(\varrho(x)\big)\, d\nu(x) = E\big[\log\big(\varrho(Z)\big)\big].$$

Zeigen Sie für $n = \exp(L+t)$, $t \geq 0$, die Abschätzung

$$E\left[|\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f) - \nu(f)|\right] \leq \|f\|_{L^2(\nu)}\left(e^{-t/4} + 2\sqrt{P(\log\varrho(Z) > L + t/2)}\right).$$

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h = f1_{\{\varrho \leq e^{L+t/2}\}}$ und verwenden Sie die Dreiecksungleichung für $\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f) - \nu(f) = \widetilde{\nu}_{\mu,n}(f) \pm \widetilde{\nu}_{\mu,n}(h) \pm \nu(h) - \nu(f)$. In allen drei Fällen können Sie dann den Ausdruck mit der Hölder bzw. der Cauchy-Schwarz Ungleichung geeignet abschätzen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien nun $\mu = \mathrm{Bin}(p, N)$ und $\nu = \mathrm{Bin}(r, N)$ für $r > p$. Zeigen Sie mithilfe von Aufgabe 2 die Abschätzung

$$E\left[|\widetilde{\nu}_{\mu,n}(f) - \nu(f)|\right] \leq \|f\|_{L^2(\nu)}\left(n^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{N}{4}H(r,p)} + \frac{4\sqrt{C(r,p)N}}{\ln(n) - NH(r,p)}\right),$$

mit

$$H(r,p) = r\ln\left(\frac{r}{p}\right) + (1-r)\left(\frac{1-r}{1-p}\right),$$
$$C(r,p) = r(1-r)\left(\ln\left(\frac{r}{p}\right) - \left(\frac{1-r}{1-p}\right)\right)^2.$$