UNI FREIBURG

Stochastische Prozesse

Wintersemester 2022/23

Vorlesung: Prof. Dr. Peter Pfaffelhuber
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 13

Abgabe: Freitag, 03.02.2022.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Betrachten Sie die Folge von (deterministischen) Prozessen $(\mathcal{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $X_t^n := nt\mathbb{1}_{[0,1/n]}(t) + (2-nt)\mathbb{1}_{(1/n,2/n]}(t)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{X}^n$ Pfade in $\mathcal{C}([0,\infty))$ hat. Zeigen Sie weiter für $\mathcal{X} \equiv 0$, dass $\mathcal{X}^n \Rightarrow_{fdd} \mathcal{X}$ für $n \to \infty$, aber nicht $\mathcal{X}^n \Rightarrow \mathcal{X}$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Seien $Y_1, Y_2, \dots$ identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[Y_1] = 0$, $\mathrm{Var}[Y_1] = 1$, $Cov(Y_i, Y_j^3) = 0 \ \forall i \neq j$ und $\mathrm{E}[Y_1^4] < \infty$.

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{X}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Folge in $\mathcal{C}([0,\infty))$ straff ist für $\mathcal{X}^n = (X_t^n)_{t\in[0,\infty)}$ mit

$$X_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}}(Y_1 + \ldots + Y_{\lfloor nt \rfloor} + (nt - \lfloor nt \rfloor)Y_{\lfloor nt \rfloor + 1}).$$

Hinweis: Verwenden Sie Theorem 16.22 und rechnen Sie die dort vorausgesetzte Abschätzung für $\limsup_{n\to\infty}$ *anstelle von* $\sup_{n\in\mathbb{N}}$ *nach. Wieso dürfen Sie das?*

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Seien $Y_1, Y_2, \dots$ unabhängige, identisch verteilte, quadratisch integrierbare Zufallsvariablen mit $\mathrm{E}[Y_1] = a$ und

$$S_t = (Y_1 + \ldots + Y_{\lfloor t \rfloor} + (t - \lfloor t \rfloor)Y_{\lfloor t \rfloor + 1}).$$

i) Zeigen Sie, dass
$$\sup_{0\le s\le t} \Big|\frac{1}{n}S_{sn} - as\Big| \xrightarrow{n\to\infty}_P 0.$$

ii) Folgern Sie aus i), dass
$$(S_{nt}/n)_{t\in[0,\infty)} \to_P (at)_{t\in[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{C}([0,\infty)).$$

iii) Zeigen oder widerlegen Sie
$$(S_{nt}/n)_{t\in[0,\infty)} \Longrightarrow (at)_{t\in[0,\infty)} \text{ in } \mathcal{C}([0,\infty)).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst

$$\sup_{s\le t} |S_{ns} - ans| \le \max_{k=1,\dots,\lfloor nt \rfloor + 1} |S_k - ak|.$$

und verwenden Sie dann die Doob'sche Ungleichung für $p = 2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte Bonus)**.** Sei $(P_i)_{i\in I}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $(P_i)_{i\in I}$ ist straff.

ii) Für alle Projektionen $\pi_1, \dots, \pi_d$ ist $(P_i^{\pi_k})_{i\in I}$ straff.

Gilt diese Aussage auch für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathcal{C}([0,\infty))$?

Aufgabe 5 (4 Punkte Bonus)**.** Seien $\mathcal{X}^n$ und $\mathcal{X}$ wir im Satz von Donsker, Theorem 16.21, und ζ eine aufsteigende Partition wir in Definition 16.3. Zeigen oder widerlegen Sie:

$$\nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}^n) \xrightarrow{n\to\infty} \nu_{2,t,\xi}(\mathcal{X}).$$

Wie passt ihr Ergebnis mit dem Satz von Donsker zusammen?