Wahrscheinlichkeitstheorie **WS 2019/2020**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Marc Weber
https://www.stochastik.uni-freiburg.de/lehre/ws-2019-2020/vorlesung-wahrscheinlichkeitstheorie-ws-2019-2020

Übung 1

Abgabe: 31.10.2019 bis 18 Uhr in den Briefkästen.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine Menge Ω. Sei $\mathcal{C} \subset 2^\Omega$ ein Ring über Ω. Zeigen Sie:

(a) Eine Mengenfunktion $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ auf $\mathcal{C}$ ist genau dann additiv, wenn Sie endlich additiv ist.

(b) Die Aussage in (a) ist im allgemeinen falsch, wenn $\mathcal{C}$ ein Halbring ist.

Hinweis: Wir nennen μ additiv wenn für disjunkte Mengen $A, B \in \mathcal{C}$ (ein plus bedeutet dei Mengen sind disjunkt)

$$\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$$

gilt. Wir nennen μ endlich additiv wenn für jede endliche disjunkte Familie $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathcal{C}$ mit $\sum_{i \in I} A_i \in \mathcal{C}$

$$\mu(\sum_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} \mu(A_i)$$

gilt.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\Omega = \mathbb{R}_+$ mit Borel σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Sei F_θ die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung zum Parameter θ, also

$$F_\theta(x) = 1 - e^{-\theta x}, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Wir definieren nun die Mengenfunktion $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \to [0, 1]$ durch

$$\mu(A) = \sup_{\theta \in \mathbb{R}_+} \mu_\theta(A),$$

wobei $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ und μ_θ das eindeutige Wahrscheinlichkeitsmaß zu F_θ ist. Zeigen Sie, dass μ eine subadditive Mengenfunktion ist, die nicht echt additiv ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das System der k-dimensionalen Quader

$$\mathcal{Q}^k := \{(a, b] \big| a, b \in \mathbb{R}^k, a \leq b)\}$$

ein Halbring ist, wobei für $a = (a_1, \ldots, a_k), b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^k$ das Intervall $(a, b]$ definiert ist durch

$$(a, b] := (a_1, b_1] \times \ldots \times (a_k, b_k],$$

und "$\leq$" komponentenweise zu verstehen ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengensysteme jeweils einen Halbring, einen Ring oder eine σ-Algebra bilden.

- $\mathcal{A} := \{N \subset \mathbb{N} \big| |N| < \infty \vee |N^c| < \infty\}$,
- $\mathcal{B} := \{N \subset \mathbb{N} \big| |N| = \infty \vee |N^c| = \infty\}$,
- $\mathcal{C} := \{N \subset \mathbb{N} \big| |N| = \infty \wedge |N^c| = \infty\}$.