Übungen zur Vorlesung "Stochastik"

Blatt 6

Abgabetermin: Donnerstag, 23.01.2020, bis 14:00 Uhr in das Fach Ihres Tutors (Nr. 2.19-2.21), UG Ernst-Zermelo-Straße 1
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie für eine Zufallsvariable X:

a) Nimmt X Werte in $\mathbb{N}_0$ an, so ist $\mathbb{E}X = \sum_{k\geq 0} \mathbb{P}(X > k)$.

b) Falls $X \geq 0$, gilt im stetigen Fall $\quad \mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$.

c) Falls $\mathbb{E}|X| < \infty$, gilt im stetigen Fall

$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx - \int_{-\infty}^0 \mathbb{P}(X < x)dx.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie $\mathbb{E}X$ und $\mathrm{Var}(X)$, falls $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ bzw. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ für $\lambda > 0$ und $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Es seien zwei Zufallsvariablen X und Y gegeben. Es sei X eine Exponential-verteilte Zufallsvariable mit Parameter $\lambda > 0$. Die Zufallsvariable Y sei Poisson-verteilt mit Parameter $\mu > 0$.

a) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X = 0.2)$ und $\mathbb{P}(Y = 2)$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{P}(X \geq Y)$ unter den Annahmen, dass X und Y unabhängig sind und $\lambda = \mu$ gilt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Als Alternative zur Varianz $\mathrm{Var}(X)$, die bekanntlich die mittlere quadratische Abweichung einer Zufallsvariablen von ihrem Erwartungswert angibt, betrachtet man gelegentlich auch die *mittlere absolute Abweichung* $\mathbb{M}[X] := \mathbb{E}|X - \mathbb{E}X|$ einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert.

a) Berechnen Sie $\mathbb{M}[X]$ für eine exponentialverteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ mit Parameter $\lambda > 0$.

b) Berechnen Sie $\mathbb{M}[X]$ für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit Poisson-Parameter $\lambda \in \mathbb{N}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Es seien $Y_1, Y_2, \ldots$ Zufallsvariablen mit $Y_n \sim B(n, p_n)$ und $\lim_{n\to\infty} np_n = 0$. Zeigen Sie, dass $Y_n \xrightarrow{P} 0$.

Hinweis: Überlegen Sie sich, dass die Inklusion $\{|Y_n| \geq \epsilon\} \subset \{|Y_n - np_n| \geq \epsilon/2\}$ für genügend große n gilt.