Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 5

Abgabetermin: Montag, 25.11.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

(a) Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume und $f_1 : \Omega \to \Omega_1$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_1$-messbare Funktion, sowie $f_2 : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbare Funktion. Zeigen Sie, dass

$$\mu^{f_2 \circ f_1} = \left(\mu^{f_1}\right)^{f_2}.$$

(b) Es sei $\Omega = \mathbb{Z}^2$ und $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2)$, sowie $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x, y) = x + y$. Bestimmen Sie μ^f.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ gegeben. Bestimmen Sie alle $(\sigma(f), \mathcal{B})$-messbaren Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei λ das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Folge konstanter Funktionen $f_n = \frac{1}{n}$ im Lemma von Fatou die strikte Ungleichung gilt.

(b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$. Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\lambda$. Widerspricht dies dem Satz von der dominierten Konvergenz?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge nicht-negativer, messbarer, reeller Funktionen auf Ω, die punktweise gegen eine Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Zeigen Sie, dass im Falle $\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = c < \infty$ auch f μ-integrierbar ist mit $\int f \, d\mu \le c$. Zeigen Sie ferner anhand eines Beispiels, dass $\int f \, d\mu$ jeden Wert in $[0, c]$ annehmen kann.

Hinweis: Wählen Sie z.B. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{1}_{[0,1]} \cdot \lambda)$ und $f := a \cdot \mathbb{1}_{(0,1]}$ für vorgegebenes $a \in [0, c]$.