Abteilung für Mathematische Stochastik — Wintersemester 2019/2020
Prof. Dr. Angelika Rohde — Johannes Brutsche, M.Sc.

Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 4

Abgabetermin: Montag, 18.11.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Für eine Folge $A_n \subset \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, von Mengen definieren wir

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{n\geq m} A_n \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\geq 1} \bigcap_{n\geq m} A_n.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\liminf_{n\to\infty} A_n \subset \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt.

(b) Es sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton, das heißt $A_n \subset A_{n+1}$ oder $A_{n+1} \subset A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n$ gilt.

(c) Es sei nun $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_n \in \mathcal{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gebe ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\mu\left(\bigcup_{n\geq m} A_n\right) < \infty$ gilt. Beweisen Sie dann die folgende Ungleichungskette:

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Wir definieren die folgenden Mengensysteme:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_1 &:= \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{Q}\},\\
\mathcal{C}_2 &:= \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\},\\
\mathcal{C}_3 &:= \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\},\\
\mathcal{C}_4 &:= \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{Q} \text{ mit } a < b\}.
\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{C}_1) = \sigma(\mathcal{C}_2) = \sigma(\mathcal{C}_3) = \sigma(\mathcal{C}_4) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Lebesgue-Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ das einzige translationsinvariante Maß ist, das auf dem Einheitsintervall $(0, 1]$ den Wert Eins besitzt. Translationsinvariant bedeutet dabei, dass $\mu(A) = \mu(t + A)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, wobei $t + A := \{t + a \mid a \in A\}$.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Sei F eine nicht-fallende und rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und μ_F definiert für alle halboffenen Intervalle $(a, b] \subset \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Zeigen Sie Bedingung (vii) aus dem Maßfortsetzungssatz, d.h. dass für Intervalle $(a, b], (a_n, b_n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $(a, b] \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n]$ gilt $\mu((a, b]) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu((a_n, b_n])$.

Hinweis: Konstruieren Sie eine endliche offene Überdeckung $\bigcup_{n=1}^{N}(a_n, b_n + \delta_n)$ von $[a + \delta, b]$ für geeignete $\delta_n, \delta > 0$ und argumentieren Sie, wieso Sie hierbei annehmen können, dass $a_1 < a_2 < \cdots < a_N$ und $a_{n+1} < b_n + \delta_n < b_{n+1} + \delta_{n+1}$.

(b) Es sei μ ein σ-endliches Maß auf dem Messraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Zeigen Sie, dass eine nicht-fallende und rechtsstetige Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

(c) Es sei $\tilde{F}$ eine weitere Funktion, welche die Gleichung aus (b) erfüllt. Zeigen Sie, dass eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $\tilde{F} = F + c$.