Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 3

Abgabetermin: Montag, 11.11.2019, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei Ω eine endliche Menge, sei $|\Omega|$ gerade und ≥ 4. Setze

$$\mathcal{D} := \{D \subset \Omega \,|\, |D| \text{ ist gerade}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ ist unstetig in } x\}$$

die Menge der Unstetigkeitsstellen von f. Zeigen Sie, dass D_f ein Element der Borel'schen σ-Algebra über $\mathbb{R}$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $A_{k,n} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \exists y, z \in \left(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right) \text{ mit } |f(y)-f(z)| > \frac{1}{k}\right\}$ offen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Es sei Ω eine überabzählbare Menge und

$$\mathcal{A} := \{A \subset \Omega \mid A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Mengenfunktion

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$
$$A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ abzählbar ist,} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ abzählbar ist.} \end{cases}$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ sei ein Maßraum. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A}^\mu := \{A \cup N : A \in \mathcal{A}$, es ex. ein $M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und $N \subset M\}$ ist eine σ-Algebra.

(b) Durch $\tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A)$ für $A \cup N \in \mathcal{A}^\mu$ wird ein wohldefiniertes Maß $\tilde{\mu}$ auf $\mathcal{A}^\mu$ definiert.

(c) Der Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}^\mu, \tilde{\mu})$ ist *vollständig*, d.h. alle Teilmengen von Mengen mit Maß 0 liegen in $\mathcal{A}^\mu$ (d.h. für alle $\tilde{A}, \tilde{B}$ mit $\tilde{A} \in \mathcal{A}^\mu$, $\tilde{B} \subset \tilde{A}$, $\tilde{\mu}(\tilde{A}) = 0$ gilt $\tilde{B} \in \mathcal{A}^\mu$).