Übungen zur Vorlesung "Analysis III"

Blatt 14

Abgabetermin: Montag, 10.02.2020, bis 10.00 Uhr in den Briefkästen im Math. Institut
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei $\mathbb{T}^2$ der zweidimensionale Torus aus Aufgabe 2 von Blatt 13 für $0 < r < R$.

(a) Es sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(\phi, \psi) \mapsto ((R + r\cos\psi)\cos\phi, (R + r\cos\psi)\sin\phi, r\sin\psi)^\top.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{im}(f) = \mathbb{T}^2$ gilt.

(b) Bestimmen Sie $U \subset \mathbb{R}^2$ so, dass $F|_U$ eine Parametrisierung von $\mathbb{T}^2$ liefert und $\mathbb{T}^2 \setminus F(U)$ eine endliche Vereinigung von höchstens eindimensionalen Untermannigfaltigkeiten ist.

(c) Berechnen Sie nun die Oberfläche $v_2(\mathbb{T}^2)$ des Torus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $N \subset \mathbb{R}^d$ eine λ^d-Nullmenge.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $\epsilon > 0$ eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ mit $N \subset U$ und $\lambda^d(U) < \epsilon$ existiert.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$f_\epsilon(y) := \left(1 - \frac{1}{\epsilon} d(y, N)\right)^+$$

mit $d(y, N) := \inf_{z \in N} ||y - z||_2$ und verwenden Sie den Satz von der monotonen Konvergenz.

(b) Folgern Sie, dass N eine d-Nullmenge sein muss.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie, ob es sich bei den folgenden Mengen um Untermannigfaltigkeiten bzw. $\mathcal{C}^1$-Flächen handelt:

(a) $B_1(-1) \cup B_1(1) \subset \mathbb{R}^2$.

(b) Es sei $I_n := \left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right]$ für $n > 1$. Wir definieren auf jedem dieser Intervalle die Hütchenfunktion h_n, welche die Intervallmitte auf 1 abbildet, die Intervallenden auf 0 und dazwischen linear interpoliert. h bezeichne die zusammengefügte Funktion auf $(0, 1]$, welche $h|_{I_n} = h_n$ erfüllt. Die zu untersuchende Menge ist dann der Graph

$$Z := \{(x, h(x)) \mid x \in (0, 1]\} \subset \mathbb{R}^2.$$

(c) $Z \cup \{(x, 0) \mid x \in (-2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

(d) $Z \cup \{(0, y) \mid y \in (-2, 2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

(a) Verifizieren Sie den Gauß'schen Integralsatz für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x, y, z)^\top$ und die Sphäre $\mathbb{S}_r^2$ mit Radius $r > 0$, d.h. zeigen Sie durch explizites Nachrechnen beider Seiten, dass

$$\int_{B_r(0)} \operatorname{div}(f) d\lambda_{B_r(0)} = \int_{\mathbb{S}_r^2} f \ d\lambda_{\mathbb{S}_r^2}.$$

(b) Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f(x, y, z) := (x^2 + e^{y^2+z^2}, y^2 + x^2 z^2, z^2 - e^y)^\top$$

und den Einheitswürfel W mit den Ecken

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie

$$\int_{\partial W} f \ d\lambda_{\partial W}.$$