Übungen zur Vorlesung
“Wahrscheinlichkeitstheorie“

Wintersemester 2018/19, Blatt 5

Abgabetermin: 22.11.2018, bis 12:00 Uhr
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an.
Bitte nur maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 17 (4 Punkte)

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n\log n} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}.$$

Außerdem sei U uniform-verteilt auf $[0,1]$ und für $n \geq 2$

$$Y_n := n \cdot \mathbb{1}_{\{U > 1 - \frac{1}{2n\log(n)}\}} - n \cdot \mathbb{1}_{\{U < \frac{1}{2n\log(n)}\}}.$$

Untersuchen Sie jeweils, ob die Folge der $(X_n)_n$ und die Folge der $(Y_n)_n$ dem schwachen oder dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt.

Hinweis: Zeigen Sie für die X_n, dass aus der Gültigkeit des starken Gesetzes folgen würde, dass $\frac{X_n}{n} \xrightarrow{n\to\infty}_{fs} 0$, und führen Sie dies zu einem Widerspruch.

Aufgabe 18 (4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastich unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_n = n^2) = \mathbb{P}(X_n = -n^2) = \frac{1}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^2}.$$

Zeigen Sie:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\mathbb{V}(X_n) = \infty.$

b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{n\to\infty}_{fs} 0.$

(bitte wenden)

Aufgabe 19 (4 Punkte)

Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ eine stetige Funktion und $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen. Wir definieren $Z_n := \mathbb{1}_{\{Y_n < f(X_n)\}}$.

a) Zeigen Sie, dass $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Z_i \xrightarrow{n\to\infty}_{fs} \int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

b) Bestimmen Sie eine Zahl n_0 unabhängig von f, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| \leq 0{,}01\right) \geq 0{,}95.$$

Hinweis: Verwenden Sie für den b)-Teil die Chebyshev-Ungleichung.

Aufgabe 20 (4+2 Punkte)

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathcal{A}_n := \sigma(X_n)$ für alle n und $S_n := \sum_{k=1}^n X_k$. Zeigen oder widerlegen Sie durch Gegenbeispiel, dass die folgenden Ereignisse terminale Ereignisse sind, also in der terminalen σ-Algebra $\mathcal{T}(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots)$ liegen.

a) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$,

b) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$,

c) $\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,

d) $\{\omega \in \Omega \mid S_n(\omega) = 0 \text{ für endlich viele } n \in \mathbb{N}\}$,

e) $\{\omega \in \Omega \mid (X_n(\omega))_n \text{ enthält eine monoton wachsende Teilfolge}\}$,

f) $\{\omega \in \Omega \mid \limsup\limits_{n\to\infty} S_n(\omega) > \liminf\limits_{n\to\infty} S_n(\omega)\}$.

Hinweis: Jeder Teil dieser Aufgabe gibt einen Punkt. Damit sind hier 2 Bonuspunkte möglich.