Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Vorlesungsskript

Versicherungsmathematik

apl. Prof. Dr. Stefan Tappe

Wintersemester 2018/19

Abteilung für Mathematische Stochastik

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

1.1 Elementare Finanzmathematik

1.1.1 Verzinsung und Kapitalfunktion

Definition 1.1.1. *Eine monoton wachsende, rechtsstetige Funktion $K : \mathbb{R}_+ \to [1, \infty)$ mit $K(0) = 1$ heißt eine Kapitalfunktion (oder Aufzinsungsfunktion).*

Definition 1.1.2. *Es sei K eine Kapitalfunktion.*

(a) Wir nennen $r := K(1)$ den Aufzinsungsfaktor (für das erste Jahr).

(b) Wir nennen $i := r - 1$ den Zinssatz ("interest") oder den effektiven Jahreszins.

(c) Wir nennen $v := 1/r$ den Abzinsungsfaktor (oder Diskontierungsfaktor).

Beispiel 1.1.3 (Diskrete Verzinsung (mit Zinseszins))**.** *Wir setzen*

$$K(t) := (1 + i)^{\lfloor t \rfloor}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei $\lfloor t \rfloor := \max\{k \in \mathbb{N}_0 : k \leq t\}$. Hierbei ist i in der Tat der Zinssatz aus Definition 1.1.2(b).

Beispiel 1.1.4 (Stetige Verzinsung (mit Zinseszins))**.** *Wir setzen*

$$K(t) := e^{\delta t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei $\delta \in \mathbb{R}_+$ die Zinsrate oder den nominellen Zinssatz bezeichnet. Hier sind $r = e^{\delta}$, $i = e^{\delta} - 1$ und $v = e^{-\delta}$. Im Allgemeinen gilt $\delta \neq i$. Wir beachten noch

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n = e^i.$$

Definition 1.1.5. *Es sei K eine Kapitalfunktion. Falls eine nichtnegative, messbare Funktion $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ existiert, so dass*

$$K(t) = 1 + \int_0^t k(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

dann heißt $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$\phi(t) := \frac{k(t)}{K(t)}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

die Zinsintensität von K.

Beispiel 1.1.6. *Für $K(t) = e^{\delta t}$ aus Beispiel 1.1.4 gilt*

$$K(t) = 1 + \int_0^t \delta e^{\delta s} ds, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Also ist $k(t) = \delta e^{\delta t}$, und es folgt

$$\phi(t) = \frac{k(t)}{K(t)} = \frac{\delta e^{\delta t}}{e^{\delta t}} = \delta.$$

Darum bezeichnen wir δ aus Beispiel 1.1.4 auch als Zinsrate.

Lemma 1.1.7. *Es sei K eine Kapitalfunktion wie in Definition 1.1.5. Dann gilt*

$$K(t) = \exp\left(\int_0^t \phi(s)ds \right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Wir nehmen an, dass k stetig ist. Dann gilt $K \in C^1(\mathbb{R}_+)$ mit $K' = k$, und es folgt

$$\frac{d}{dt}\big(\ln K(t)\big) = \frac{k(t)}{K(t)} = \phi(t).$$

Wegen $K(0) = 1$ folgt

$$\ln K(t) = \int_0^t \phi(s)ds.$$

$\square$

Definition 1.1.8. *Es sei K eine Kapitalfunktion. Wir definieren die* <u>*kumulierte Zinsintensität*</u> $\Phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *durch*

$$\Phi(t) := \int_{(0,t]} \frac{1}{K(s-)} dK(s), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

wobei

$$K(s-) := \lim_{u \uparrow s} K(u).$$

Bemerkung 1.1.9. *Es sei K eine Kapitalfunktion wie in Definition 1.1.5. Dann gilt*

$$\Phi(t) = \int_0^t \phi(s) ds = \int_0^t \frac{k(s)}{K(s)} ds.$$

Mit Lemma 1.1.7 folgt

$$K(t) = e^{\Phi(t)} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(t) = \ln K(t).$$

Im Allgemeinen gilt jedoch nicht $\Phi(t) = \ln K(t)$.

Beispiel 1.1.10. *Sei $K(t) = (1+i)^{\lfloor t \rfloor}$ wie in Beispiel 1.1.3. Dann ist $K(s-) = 1$ für alle $s \in [0,1]$. Es folgt*

$$\Phi(1) = \int_{(0,1]} \frac{1}{K(s-)} dK(s) = \int_{(0,1]} dK(s) = K(1) - K(0) = i.$$

Hingegen ist $\ln K(1) = \ln(1+i)$.

1.1.2 Bewertung von Zahlungsströmen

Definition 1.1.11.

(a) Ein <u>*gerichteter Zahlungsstrom*</u> *ist eine rechtsstetige, monoton wachsende Funktion $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.*

(b) Wir bezeichnen mit $\mathscr{Z}_g$ die Menge der gerichteten Zahlungsströme.

(c) Eine Funktion $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ heißt ein <u>*ungerichteter Zahlungsstrom*</u> *(oder kurz* <u>*Zahlungsstrom*</u>*), falls $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}_g$ mit $Z = Z_1 - Z_2$ existieren, so dass $Z_1(\infty) := \lim_{t\to\infty} Z_1(t) < \infty$ oder $Z_2(\infty) := \lim_{t\to\infty} Z_2(t) < \infty$.*

(d) Wir bezeichnen mit $\mathscr{Z}$ die Menge der ungerichteten Zahlungsströme.

Beispiel 1.1.12. *Ist K eine Kapitalfunktion, so ist $Z := K - 1$ ein gerichteter Zahlungsstrom; wir nennen ihn einen* <u>*Zinszahlungsstrom*</u>*.*

Beispiel 1.1.13. *Es seien* $(z_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}_+$ *eine Folge, und* $(t_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ *eine streng monoton wachsende Folge mit* $t_0 = 0$ *und* $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$*. Dann ist*

$$Z(t) := \sum_{j=0}^{\infty} z_j \mathbb{1}_{[t_j,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+$$

ein gerichteter Zahlungsstrom; wir nennen ihn eine <u>*diskrete Zeitrente*</u>*.*

Definition 1.1.14. *Es seien* K *eine Kapitalfunktion und* $Z \in \mathscr{Z}_g$ *eine diskrete Zeitrente. Dann nennen wir*

$$a(Z) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z_j}{K(t_j)} \in [0,\infty]$$

den <u>*Barwert*</u> *des Zahlungsstroms* Z*.*

Bemerkung 1.1.15. *Wir können den Barwert schreiben als*

$$a(Z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Delta Z(t_j)}{K(t_j)} = \sum_{t\geq 0} \frac{\Delta Z(t)}{K(t)},$$

wobei

$$\Delta Z(t) := Z(t) - Z(t-).$$

Bemerkung 1.1.16. *Für jedes* $Z \in \mathscr{Z}_g$ *existiert ein eindeutig bestimmtes Maß* m_Z *auf* $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$*, so dass* $m_Z(\{0\}) = Z(0)$ *und*

$$m_Z((s,t]) = Z(t) - Z(s), \quad 0 \leq s \leq t.$$

Für jede m_Z*-integrierbare Funktion* $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *definieren wir*

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(s)\, dZ(s) := \int_{\mathbb{R}_+} f\, dm_Z.$$

Definition 1.1.17. *Es seien* $Z \in \mathscr{Z}$ *ein Zahlungsstrom und* K *eine Kapitalfunktion.*

(a) Der <u>*Endwert*</u> *von* Z *bis (einschließlich) zur Zeit* $t \in \mathbb{R}_+$ *is gegeben durch*

$$s(Z)(t) := K(t) \int_{[0,t]} \frac{1}{K(s)} dZ(s).$$

(b) Der <u>*Barwert*</u> *von* Z *bis zur Zeit* t *ist gegeben durch*

$$a(Z)(t) := \int_{[0,t]} \frac{1}{K(s)} dZ(s).$$

(c) *Der* <u>*Barwert*</u> *des gesamten Zahlungsstroms* Z *ist*

$$a(Z) := \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{K(s)} dZ(s).$$

Bemerkung 1.1.18. *Für* $Z \in \mathscr{Z}_g$ *gilt* $a(Z) \in [0, \infty]$, *und für* $Z \in \mathscr{Z}_g$ *gilt* $a(Z) \in [-\infty, \infty]$.

Satz 1.1.19. *Für eine càdlàg-Funktion* $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *mit* $Z_0 = 0$ *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Z *ist von lokal beschränkter Variation.*

(ii) *Es existieren monoton wachsende, rechtsstetige Funktionen* $Z_1, Z_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *mit* $Z_1(0) = Z_2(0) = 0$, *so dass* $Z = Z_1 - Z_2$.

Satz 1.1.20. *Es sei* $Z : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *eine càdlàg-Funktion von lokal beschränkter Variation mit* $Z(0) = 0$. *Dann existieren eindeutig bestimmte monoton wachsende, rechtsstetige Funktionen* $Z_1, Z_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *mit* $Z_1(0) = Z_2(0) = 0$, *so dass* $Z = Z_1 - Z_2$ *und* $\mathrm{Var}(Z) = Z_1 + Z_2$. *Diese sind gegeben durch*

$$Z_1 = \frac{Z + \mathrm{Var}(Z)}{2} \quad \textit{und} \quad Z_2 = Z_1 - Z.$$

1.1.3 Äquivalenzprinzip und Deckungskapital

Es sei K eine Kapitalfunktion.

Definition 1.1.21. *Zwei Zahlungsströme* $Z_1, Z_2 \in \mathscr{Z}$ *heißen* <u>*äquivalent*</u> *(bezüglich* K*), wenn* $a(Z_1) = a(Z_2) \in \mathbb{R}$.

Definition 1.1.22. *Es seien* $Z_L, Z_P \in \mathscr{Z}_g$ *mit* $\min\{a(Z_L), a(Z_P)\} < \infty$.

(a) *Für jeden Zeitpunkt* $t \in \mathbb{R}_+$ *ist das* <u>*prospektive Deckungskapital*</u> *von* (Z_L, Z_P) *zur Kapitalfunktion* K *definiert durch*

$$V(t) := K(t) \left[\int_{[t,\infty)} \frac{dZ_L(s)}{K(s)} - \int_{[t,\infty)} \frac{dZ_P(s)}{K(s)} \right].$$

(b) *Ist* $V(t) \geq 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$, *dann heißt* (Z_L, Z_P) *ein* <u>*Sparplan*</u>.

(c) *Ist* $V(t) \leq 0$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$, *dann heißt* (Z_L, Z_P) *ein* <u>*Kreditvertrag*</u>, *und* $-V(t)$ *ist die* <u>*Restschuld*</u> *zur Zeit* t.

Bemerkung 1.1.23. *Hierbei stehen P für Prämie (an ein Unternehmen) und L für Leistungen (an den Kunden).*

$V(t)$ ist der Betrag, den das Unternehmen zur Zeit t vorhalten muss, um die noch ausstehenden Forderungen erfüllen zu können, wenn die Verzinsung durch K bestimmt wird.

Beispiel 1.1.24 (Sparbuch)**.** *Wir betrachten $K(t) = e^{\delta t}$ und $Z_P = A$, $Z_L = B\mathbb{1}_{[5,\infty)}$, etwa mit $\delta = 0.05$ und $A = 10000$. Wie ist B zu wählen, so dass Z_P und Z_L äquivalent sind? Die Äquivalenz $a(Z_P) = a(Z_L)$ bedeutet*

$$\frac{A}{K(0)} = \frac{B}{K(5)}.$$

Wegen $K(0) = 1$ folgt

$$B = K(5)A = e^{5\delta}A.$$

Weiterhin gilt

$$V(t) = K(t)\Big(\frac{B}{K(5)}\mathbb{1}_{[0,5]}(t) - A\mathbb{1}_{\{0\}}(t)\Big) = K(t)\frac{B}{K(5)}\mathbb{1}_{(0,5]}(t).$$

Definition 1.1.25. *Es seien $Z_L, Z_P \in \mathscr{Z}_g$ mit $\min\{a(Z_L), a(Z_P)\} < \infty$. Für jeden Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_+$ ist das retrospektive Deckungskapital von (Z_L, Z_P) zur Kapitalfunktion K definiert durch*

$${}^{(r)}V(t) := K(t)\left[\int_{[0,t)} \frac{dZ_P(s)}{K(s)} - \int_{[0,t)} \frac{dZ_L(s)}{K(s)}\right].$$

${}^{(r)}V(t)$ ist der Zeitwert der bis zur Zeit t abgelaufenen Verpflichtungen.

Lemma 1.1.26. *Sind $Z_L, Z_P \in \mathscr{Z}_g$ äquivalente Zahlungsströme zur Kapitalfunktion K, so gilt*

$${}^{(r)}V(t) = V(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Wegen $a(Z_L) = a(Z_P)$ gilt

$$\begin{aligned}
V(t) &= K(t)\left[\int_{[t,\infty)} \frac{dZ_L(s)}{K(s)} - \int_{[t,\infty)} \frac{dZ_P(s)}{K(s)}\right] \\
&= K(t)\left[a(Z_L) - \int_{[0,t)} \frac{dZ_L(s)}{K(s)} - a(Z_P) + \int_{[0,t)} \frac{dZ_P(s)}{K(s)}\right] \\
&= K(t)\left[\int_{[0,t)} \frac{dZ_P(s)}{K(s)} - \int_{[0,t)} \frac{dZ_L(s)}{K(s)}\right] =^{(r)} V(t).
\end{aligned}$$

□

Definition 1.1.27. *Es sei $Z \in \mathscr{Z}$ mit Zerlegung $Z = Z_P - Z_L$ für $Z_P, Z_L \in \mathscr{Z}_g$. Wir nennen (sofern existent) das minimale $i \in \mathbb{R}_+$, so dass $a(Z_P) = a(Z_L)$ bezüglich der Kapitalfunktion $K(t) = (1+i)^t$, die Rendite (oder den Effektivzins) von Z.*

Beispiel 1.1.28. *Wir betrachten $Z_P = \pi \mathbb{1}_{[t_P,\infty)}$ und $Z_L = A\mathbb{1}_{[t_L,\infty)}$ für $\pi, A \in (0,\infty)$ und $t_P, t_L \in \mathbb{R}_+$. Die Äquivalenz $a(Z_P) = a(Z_L)$ besagt*

$$\frac{\pi}{(1+i)^{t_P}} = \frac{A}{(1+i)^{t_L}}.$$

Für $t_L \neq t_P$ folgt

$$i = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{1}{t_L - t_P}} - 1.$$

Wegen $i \in \mathbb{R}_+$ muss eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt sein:

- *$t_L > t_P$ und $A \geq \pi$.*
- *$t_L < t_P$ und $A \leq \pi$.*

1.2 Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik

1.2.1 Sterbewahrscheinlichkeiten

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin sei $T_x : \Omega \to (0,\infty)$ die restliche Lebensdauer einer Person mit Lebensalter x. Wir bezeichnen mit $F = F_{T_x} : \mathbb{R} \to [0,1]$ die Verteilungsfunktion, und nehmen an, dass $F(0) = 0$. Wir setzen

$${}_tq_x := \mathbb{P}(T_x \leq t) \in [0,1], \quad t \in \mathbb{R}_+$$

und $q_x := {}_1q_x$. Oft vereinbaren wir auch $T = T_x$.

Definition 1.2.1. *Das maximale Restalter ist definiert durch*

$$t_{\max} := \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : F(t) < 1\} = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(T > t) > 0\} \in (0,\infty].$$

Definition 1.2.2. *Wir definieren die Überlebensfunktion $\bar{F} : \mathbb{R} \to [0,1]$ als*

$$\bar{F}(t) := 1 - F(t) = \mathbb{P}(T_x > t).$$

Wir setzen auch ${}_tp_x := \mathbb{P}(T_x > t)$ und $p_x := {}_1p_x$.

Definition 1.2.3. *Ist T absolutstetig mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist, dann definieren wir*

$$\lambda : (0, t_{\max}) \to \mathbb{R}_+, \quad \lambda(t) := \frac{f(t)}{1 - F(t)} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}.$$

Wir nennen $\lambda(t)$ die Sterblichkeitsrate oder Sterblichkeitsintensität zur Zeit t.

Definition 1.2.4. *Allgemeiner definieren wir die kumulierte Sterblichkeitsrate*

$$\Lambda(t) := \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F(u-)} dF(u) \in [0, \infty], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 1.2.5. *Falls T absolutstetig mit Dichte $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ist, so gilt*

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, \quad t \in (0, t_{\max}).$$

Die Überlebensfunktion $\bar{F}$ erfüllt die DGL

$$\begin{cases} \bar{F}'(t) &= -\lambda(t)\bar{F}(t), \quad t \in (0, t_{\max}) \\ \bar{F}(0) &= 1. \end{cases}$$

Die eindeutig bestimmte Lösung ist gegeben durch

$$\bar{F}(t) = \exp\left(- \int_0^t \lambda(s) ds \right) = \exp(-\Lambda(t)).$$

Wichtige Größen in Sterbetafeln:

- ${}_kp_x$ ist die k-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen.
- p_x ist die einjährige Überlebenswahrscheinlichkeit eines x-Jährigen.
- ${}_kq_x$ ist die k-jährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen.
- q_x ist die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines x-Jährigen.
- ℓ_x ist die (erwartete) Anzahl der das Alter x erreichenden Personen; häufig auf der Basis $\ell_0 = 100.000$.
- d_x ist die (erwartete) Anzahl der im Lebensjahr x Sterbenden.
- e_x ist die Restlebenserwartung eines x-Jährigen.

Beispiel 1.2.6 (Sterblichkeitsraten)**.**

- *De Moivre (1724):*

$$\lambda(t) = \frac{1}{t_{\max} - t}, \quad t \in (0, t_{\max}) \quad \textit{mit } t_{\max} = 86.$$

- *Gompertz (1825):*

$$\lambda(t) = be^{ct} \quad \textit{mit } b, c > 0.$$

- *Makeham (1860):*

$$\lambda(t) = a + be^{ct} \quad \textit{mit } a, b, c > 0.$$

- *Weibull (1939):*

$$\lambda(t) = kt^{\gamma} \quad \textit{mit } k > 0 \textit{ und } \gamma > -1.$$

1.2.2 Elemente eines Lebensversicherungsvertrages

Definition 1.2.7. *Ein stochastischer Prozess ist eine Familie $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsvariablen.*

Definition 1.2.8. *Ein zufälliger Zahlungsstrom ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, so dass für jedes $\omega \in \Omega$ der Pfad $t \mapsto X_t(\omega)$ in $\mathscr{L}$ liegt.*

Definition 1.2.9. *Ein Auszahlungsspektrum ist eine nicht-negative, messbare Funktion $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.*

Definition 1.2.10. *Eine kumulierte Prämie oder Prämienfunktion ist eine monoton wachsende, rechtsstetige Funktion $\Pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$.*

Für $t \in \mathbb{R}_+$ ist $\Pi(t)$ die Summe aller bis zur Zeit t eingezahlten Prämien.

Definition 1.2.11. *Die einen Lebensversicherungsvertrag (LVV) bestimmenden Größen sind:*

- *F ist die Verteilungsfunktion der restlichen Lebensdauer $T : \Omega \to (0, \infty)$.*
- *$\tau \in (0, t_{\max}]$ ist der Endzeitpunkt des Vertrages.*
- *$Y := \min\{T, \tau\}$ ist der (zufällige) Leistungszeitpunkt.*
- *Das Auszahlungsspektrum A. Zum Zeitpunkt Y wird der Betrag $A(Y)$ an den Versicherungsnehmer bezahlt.*

- *Die Kapitalfunktion* K.
- *Die Prämienfunktion* Π.

Aller Größen außer T (und damit Y) sind (in diesem Modell) bekannt und deterministisch.

Definition 1.2.12.

(a) *Der (gerichtete) Leistungsstrom eines LVV ist gegeben durch*

$$Z_L := A(Y)\mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}.$$

(b) *Der (gerichtete) Prämienstrom ist gegeben durch*

$$Z_P := \Pi\mathbb{1}_{[\![0,Y[\![} + \Pi(Y-)\mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}.$$

(c) *Der (zufällige) Zahlungsstrom eines LVV ist gegeben durch*

$$Z := Z_L - Z_P.$$

Beispiele 1.2.13. *Spezialfälle:*

- $\tau = \infty$. *Reine Todesfallversicherung (lebenslängliche Deckung).*
- $\tau < \infty$ *und* $A(\tau) = 0$. *Temporäre Todesfallversicherung (Risikoversicherung).*
- $\tau < \infty$ *und* $A(t) = 0$ *für* $t < \tau$ *sowie* $A(\tau) > 0$. *Reine Erlebensfallversicherung.*
- $\tau < \infty$ *und* $A(t) \geq 0$ *für* $t \leq \tau$. *Gemischte Versicherung (Kapitallebensversicherung).*

Definition 1.2.14. *Der (zufällige) Barwert eines LVV aus Sicht des Versicherungsnehmers (VN) ist*

$$B = a(Z_L) - a(Z_P).$$

Definition 1.2.15.

(a) *Der (erwartete) Leistungsbarwert ist gegeben durch* $\mathbb{E}[a(Z_L)]$.

(b) *Der (erwartete) Prämienbarwert ist gegeben durch* $\mathbb{E}[a(Z_P)]$.

(c) *Eine Prämienfunktion* Π *heißt Nettoprämienfunktion, falls* $\mathbb{E}[B] = 0$*; das heißt* $\mathbb{E}[a(Z_L)] = \mathbb{E}[a(Z_P)]$.

Bemerkung 1.2.16. *Es gilt*

$$a(Z_L) = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{K(s)} dZ_L(s) = \frac{A(Y)}{K(Y)}$$

und

$$a(Z_P) = \int_{[0,\infty)} \frac{1}{K(s)} dZ_P(s) = \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s).$$

Bemerkung 1.2.17. *Es gilt*

$$F_Y = F\mathbb{1}_{[0,\tau)} + \mathbb{1}_{[\tau,\infty)}$$

und

$$F_Y(ds) = \mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)F(ds) + (1 - F(\tau-))\delta_\tau(ds).$$

Lemma 1.2.18.

(a) Der erwartete Leistungsbarwert ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[a(Z_L)] = \int_{[0,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1 - F(\tau-)).$$

Der erste Term ist der Leistungsbarwert im Todesfall, und der zweite ist der Leistungsbarwert im Erlebensfall.

(b) Der erwartete Prämienbarwert ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[a(Z_P)] = \int_{[0,\tau)} \frac{1 - F(s)}{K(s)} d\Pi(s).$$

Beweis.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[a(Z_L)] &= \mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)}\right] = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s) = \int_{[0,\tau]} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s) \\ &= \int_{[0,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1 - F(\tau-)).\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[a(Z_P)] &= \mathbb{E}\left[\int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s)\right] = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{s<Y\}}]}{K(s)} d\Pi(s) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\mathbb{P}(Y > s)}{K(s)} d\Pi(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1 - F_Y(s)}{K(s)} d\Pi(s) = \int_{[0,\tau)} \frac{1 - F(s)}{K(s)} d\Pi(s).\end{aligned}$$

□

Definition 1.2.19. *Eine reelle Zahl* $\tilde{\Pi} \in \mathbb{R}_+$ *heißt* *<u>Nettoeinmalprämie</u> (NEP), wenn* $\Pi(t) = \tilde{\Pi}$, $t \in \mathbb{R}_+$ *eine Nettoprämienfunktion ist.*

Beispiel 1.2.20. *Für* $\Pi(t) = \tilde{\Pi}$, $t \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $a(Z_P) = \tilde{\Pi}$. *Also ist die NEP gegeben durch*

$$\tilde{\Pi} = \mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)}\right].$$

Im Spezialfall $A(t) \equiv A$ *und* $K(t) = e^{\delta t}$ *gilt*

$$\tilde{\Pi} = A \cdot \mathbb{E}\left[e^{-\delta Y}\right].$$

Definition 1.2.21. *Eine <u>laufende konstante vorschüssige Prämie</u>* Π *zu den Zeitpunkten* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < \tau$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$ *ist gegeben durch*

$$\Pi = \sum_{k=0}^{N-1} \pi \mathbb{1}_{[t_k,\infty)},$$

wobei $\pi \in \mathbb{R}_+$ *so gewählt ist, dass* Π *eine Nettoprämienfunktion ist.*

Bemerkung 1.2.22. *Für* $N = 1$ *haben wir eine NEP.*

Definition 1.2.23. *Die <u>natürliche Prämie</u> (zahlbar zu den Zeitpunkten* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = \tau$ *mit* $N \in \overline{\mathbb{N}}$*) ist gegeben durch*

$$\Pi = \sum_{k=0}^{N-1} \pi_k \mathbb{1}_{[t_k,\infty)},$$

wobei

$$\pi_k = K(t_k)\mathbb{E}\left[\int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{1}{K(s)} dZ_L(s) \,\middle|\, T > t_k\right], \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

Satz 1.2.24. *Es gelten folgende Aussagen:*

(a) Es gilt

$$\pi_k = \frac{K(t_k)}{1 - F(t_k)} \int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s), \quad k = 0, \ldots, N-1.$$

(b) Die natürliche Prämie ist eine Nettoprämienfunktion.

Beweis.

(a) Es gilt $\mathbb{P}^{\{T>t_k\}} \ll \mathbb{P}$ mit

$$\frac{d\mathbb{P}^{\{T>t_k\}}}{d\mathbb{P}} = \frac{\mathbb{1}_{\{T>t_k\}}}{\mathbb{P}(T>t_k)}.$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
\pi_k &= K(t_k)\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{\{T>t_k\}}}\left[\int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{1}{K(s)} dZ_L(s)\right] \\
&= \frac{K(t_k)}{\mathbb{P}(T>t_k)}\mathbb{E}\left[\int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{1}{K(s)} dZ_L(s)\, \mathbb{1}_{\{T>t_k\}}\right] \\
&= \frac{K(t_k)}{1-F(t_k)}\mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)} \mathbb{1}_{\{Y\in(t_k,t_{k+1}]\}}\right] \\
&= \frac{K(t_k)}{1-F(t_k)} \int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s).
\end{aligned}$$

(b) Wegen $F(0)=0$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[a(Z_P)] &= \int_{[0,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-F(t_k)}{K(t_k)}\pi_k \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1-F(t_k)}{K(t_k)} \frac{K(t_k)}{1-F(t_k)} \int_{(t_k,t_{k+1}]} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s) \\
&= \int_{[0,\tau]} \frac{A(s)}{K(s)} dF_Y(s) = \mathbb{E}[a(Z_L)].
\end{aligned}$$

□

1.2.3 Das Nettodeckungskapital

Wir betrachten einen LVV mit einer Nettoprämienfunktion Π.

Definition 1.2.25. *Das (erwartete) prospektive Nettodeckungskapital (NDK) $V(t)$ eines LVV zur Zeit $t \in [0, t_{\max})$ ist gegeben durch*

$$V(t) = K(t)\,\mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)}\mathbb{1}_{\{t\le Y\}} - \int_{[\![t,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) \,\Big|\, T>t\right].$$

Lemma 1.2.26. *Es gilt $V(0)=0$.*

Beweis. In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned} V(0) &= K(0)\,\mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)}\mathbb{1}_{\{0\le Y\}} - \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)}d\Pi(s) \,\Big|\, T>0\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)} - \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)}d\Pi(s)\right] \\ &= \mathbb{E}[a(Z_L)] - \mathbb{E}[a(Z_P)] = 0. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.2.27.

(a) *Es gilt für alle* $t \in [0,\tau)$

$$V(t) = \frac{K(t)}{1-F(t)}\left(\int_{(t,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)}dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1-F(\tau-)) - \int_{[t,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)}d\Pi(s)\right).$$

(b) *Ist* $\tau < t_{\max}$*, dann gilt*

$$V(\tau) = A(\tau) \quad \textit{und} \quad V(t) = 0 \quad \textit{für alle } t \in (\tau, t_{\max}).$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{t\uparrow\tau} \frac{V(t)}{K(t)} = \frac{A(\tau)}{K(\tau)} = \frac{V(\tau)}{K(\tau)}.$$

Beweis.

(a) Für $t \in [0,\tau)$ gilt $\{T>t\} = \{Y>t\}$, und daher

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{K(t)}{\mathbb{P}(T>t)}\,\mathbb{E}\left[\left(\frac{A(Y)}{K(Y)}\mathbb{1}_{\{t\le Y\}} - \int_{[\![t,Y[\![} \frac{1}{K(s)}d\Pi(s)\right)\mathbb{1}_{\{T>t\}}\right] \\ &= \frac{K(t)}{1-F(t)}\left(\int_{(t,\tau]} \frac{A(s)}{K(s)}dF_Y(s) - \int_{[t,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)}d\Pi(s)\right) \\ &= \frac{K(t)}{1-F(t)}\left(\int_{(t,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)}dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1-F(\tau-)) - \int_{[t,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)}d\Pi(s)\right). \end{aligned}$$

(b) Es gelte $\tau < t_{\max}$. Für $t \in (\tau, t_{\max})$ gilt wegen $Y \le \tau < t$, dass $V(t) = 0$. Für $t = \tau$ gilt $\{T>t\} = \{T>\tau\} = \{Y=\tau\}$, und daher

$$V(\tau) = K(\tau)\,\mathbb{E}\left[\frac{A(\tau)}{K(\tau)}\mathbb{1}_{\{t\le\tau\}} \,\Big|\, T>\tau\right] = A(\tau).$$

Außerdem gilt

$$\lim_{t\uparrow\tau} \frac{V(t)}{K(t)} = \lim_{t\uparrow\tau} \frac{1}{1-F(t)}\frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1-F(\tau-)) = \frac{A(\tau)}{K(\tau)} = \frac{V(\tau)}{K(\tau)}.$$

□

Lemma 1.2.28. *Es gilt die retrospektive Darstellung*

$$V(t) = \frac{K(t)}{1-F(t)}\Big(- \int_{[0,t]} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \int_{[0,t)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s)\Big).$$

für alle $t \in [0,\tau)$.

Beweis. Wegen Lemma 1.2.18 gilt

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}[a(Z_L)] - \mathbb{E}[a(Z_P)] \\
&= \int_{[0,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1-F(\tau-)) - \int_{[0,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s) \\
&= \int_{[0,t]} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \int_{(t,\tau)} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \frac{A(\tau)}{K(\tau)}(1-F(\tau-)) \\
&\quad - \int_{[0,t)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s) - \int_{[t,\tau)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s)
\end{aligned}$$

Also folgt mit Lemma 1.2.27

$$(1-F(t))\frac{V(t)}{K(t)} = - \int_{[0,t]} \frac{A(s)}{K(s)} dF(s) + \int_{[0,t)} \frac{1-F(s)}{K(s)} d\Pi(s),$$

und damit die behauptete retrospektive Darstellung. □

1.2.4 Die Thielesche Differentialgleichung

Wir nehmen an, dass nicht-negative, stetige Funktionen $k, f, \pi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ existieren, so dass

$$\begin{aligned}
K(t) &= 1 + \int_0^t k(s)ds, \quad t \in [0,\tau), \\
F(t) &= \int_0^t f(s)ds, \quad t \in [0,\tau), \\
\Pi(t) &= \int_0^t \pi(s)ds \quad t \in [0,\tau).
\end{aligned}$$

Weiterhin nehmen wir an, dass A auf $[0,\tau)$ stetig ist. Wir erinnern an die Zinsintensität

$$\phi(t) = \frac{k(t)}{K(t)}$$

und die Sterblichkeitsintensität

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}.$$

Satz 1.2.29. *Das Nettodeckungskapital V erfüllt die Thielesche Differentialgleichung*

$$\begin{cases} V'(t) &= \phi(t)V(t) + \pi(t) + \lambda(t)(V(t) - A(t)), \quad t \in [0, \tau) \\ V(0) &= 0. \end{cases}$$

Beweis. Nach Lemma 1.2.26 gilt $V(0) = 0$, und nach Lemma 1.2.28 gilt

$$V(t) = \frac{K(t)}{1 - F(t)} \Big(- \int_0^t \frac{A(s)}{K(s)} f(s) ds + \int_0^t \frac{1 - F(s)}{K(s)} \pi(s) ds \Big).$$

Für die Funktion

$$W(t) := \frac{K(t)}{1 - F(t)}, \quad t \in [0, \tau)$$

gilt

$$\begin{aligned} W'(t) &= \frac{(1 - F(t))k(t) + K(t)f(t)}{(1 - F(t))^2} = \frac{k(t)}{1 - F(t)} + \frac{K(t)f(t)}{(1 - F(t))^2} \\ &= \frac{k(t)}{K(t)} W(t) + \frac{f(t)}{1 - F(t)} W(t) = \phi(t)W(t) + \lambda(t)W(t). \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} V'(t) &= \phi(t)V(t) + \lambda(t)V(t) + \frac{K(t)}{1 - F(t)} \Big(- \frac{A(t)}{K(t)} f(t) + \frac{1 - F(t)}{K(t)} \pi(t) \Big) \\ &= \phi(t)V(t) + \lambda(t)V(t) - \lambda(t)A(t) + \pi(t). \end{aligned}$$

□

Satz 1.2.30. *Die Thielesche Differentialgleichung besitzt die eindeutig bestimmte Lösung*

$$V(t) = \int_0^t (\pi(s) - \lambda(s)A(s)) \exp\Big(\int_s^t (\phi(u) + \lambda(u)) du \Big) ds.$$

Beweis. Übung. □

Definition 1.2.31.

(a) *Wir nennen*

$$\pi^s(t) = V'(t) - \phi(t)V(t)$$

die Sparkomponente.

(b) Wir nennen

$$\pi^r(t) = (A(t) - V(t))\lambda(t)$$

die Risikokomponente.

Bemerkung 1.2.32. *Dann gilt die Zerlegung*

$$\pi(t) = \pi^s(t) + \pi^r(t).$$

Bemerkung 1.2.33. *Es gelte $A(\tau) = 0$. Das stetige Analogon von Definition 1.2.23 ist*

$$\pi^{\mathrm{nat}}(s) := \lambda(s)A(s) = \frac{f(s)}{1 - F(s)}A(s).$$

Nach Lemma 1.2.27 gilt für alle $t \in [0, \tau)$

$$V(t) = \frac{K(t)}{1 - F(t)}\left(\int_t^\tau \frac{A(s)}{K(s)}f(s)ds - \int_t^\tau \frac{1 - F(s)}{K(s)}\pi^{\mathrm{nat}}(s)ds\right) = 0.$$

Also gilt $V = V' = 0$, und es folgt

$$\pi^{\mathrm{nat}}(t) = A(t)\lambda(t) = \pi^r(t).$$

1.2.5 Die Thielesche Integralgleichung

Wir erinnern an die kumulierte Sterblichkeitsrate

$$\Lambda(t) = \int_{[0,t]} \frac{1}{1 - F(s-)}dF(s).$$

Satz 1.2.34. *Das Nettodeckungskapital V erfüllt die Thielesche Integralgleichung*

$$\frac{V(t)}{K(t)} = \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)}d\Pi(s) - \int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)}d\Lambda(u), \quad t \in [0, \tau).$$

Beweis. Siehe [BOS17, Satz 2.83]. □

Bemerkung 1.2.35. *Unter den Annahmen des vorherigen Abschnittes erhalten wir die Thielesche Differentialgleichung aus Satz 1.2.29.*

Beweis. Übung. □

Kapitel 2

Der Satz von Hattendorf

2.1 Nettoeinmalprämie und Varianz des Barwertes

Lemma 2.1.1. *Es seien X eine Zufallsvariable und $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbare, monoton wachsende Funktionen, so dass $f(X), g(X) \in \mathscr{L}^1$. Dann ist $f(X)g(X)$ quasi-integrierbar und*

$$\mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[f(X)g(X)] \in (-\infty, \infty].$$

Beweis. Wegen der Monotonie von f und g gilt

$$\big(f(y) - f(x)\big)\big(g(y) - g(x)\big) \geq 0 \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$\mathbb{E}\big[\big(f(y) - f(X)\big)\big(g(y) - g(X)\big)\big] \geq 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Also gilt

$$f(y)g(y) - f(y)\mathbb{E}[g(X)] - g(y)\mathbb{E}[f(X)] + \mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq 0 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt die Quasi-integrierbarkeit von $f(X)g(X)$ mit $\mathbb{E}[f(X)g(X)] \in (-\infty, \infty]$ und

$$f(X)g(X) - f(X)\mathbb{E}[g(X)] - g(X)\mathbb{E}[f(X)] + \mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq 0,$$

und somit durch nochmaliges Bilden des Erwartungswertes

$$2\mathbb{E}[f(X)g(X)] - 2\mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)] \geq 0.$$

$\square$

Satz 2.1.2. *Die Funktion A/K sei monoton fallend. Dann sind für eine Nettoprämienfunktion Π folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathrm{Var}[B]$ *ist minimal bezüglich aller Nettoprämienfunktionen.*

(ii) Π *ist eine Nettoeinmalprämie.*

Beweis. Es sei Π eine Nettoprämienfunktion. Wir definieren

$$\bar{A}(t) := \frac{A(t)}{K(t)}, \quad \bar{\Pi}(t) := \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s).$$

Wegen $K(0) = 1$ ist $\bar{A}(t) \leq A(0)$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Also ist $\bar{A}(Y)$ eine beschränkte Zufallsvariable, und damit gilt insbesondere $\mathrm{Var}[\bar{A}(Y)] < \infty$. Nun unterscheiden wir zwei Fälle:

- $\mathrm{Var}[\bar{\Pi}(Y)] = \infty$. Dann gilt

  $$\mathrm{Var}[B] = \mathrm{Var}[\bar{A}(Y) - \bar{\Pi}(Y)] = \infty.$$

  Denn andernfalls wäre $B \in \mathscr{L}^2$, was zum Wiederspruch $\bar{\Pi}(Y) \in \mathscr{L}^2$ führt.

- $\mathrm{Var}[\bar{\Pi}(Y)] < \infty$. Dann gilt

  $$\begin{aligned} \mathrm{Var}[B] &= \mathrm{Var}[\bar{A}(Y) - \bar{\Pi}(Y)] \\ &= \mathrm{Var}[\bar{A}(Y)] - 2\mathrm{Cov}(\bar{A}(Y), \bar{\Pi}(Y)) + \mathrm{Var}[\bar{\Pi}(Y)]. \end{aligned}$$

  Falls Π eine NEP ist, dann ist $\bar{\Pi}(Y) = \Pi(0)$ deterministisch, und es folgt

  $$\mathrm{Var}[B] = \mathrm{Var}[\bar{A}(Y)].$$

  Nun nehmen wir an, dass Π keine NEP ist. Die Funktion $\bar{\Pi}$ ist monoton wachsend, und nach Voraussetzung ist die Funktion $-\bar{A}$ auch monoton wachsend. Nach Lemma 2.1.1 folgt

  $$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\bar{A}(Y), \bar{\Pi}(Y)) &= \mathbb{E}[\bar{A}(Y)\bar{\Pi}(Y)] - \mathbb{E}[\bar{A}(Y)]\mathbb{E}[\bar{\Pi}(Y)] \\ &= \mathbb{E}[-\bar{A}(Y)]\mathbb{E}[\bar{\Pi}(Y)] - \mathbb{E}[-\bar{A}(Y)\bar{\Pi}(Y)] \leq 0. \end{aligned}$$

  Also folgt

  $$\mathrm{Var}[\bar{A}(Y)] \leq \mathrm{Var}[B].$$

□

Bemerkung 2.1.3. *Für ein konstantes Auszahlungsspektrum A ist A/K monoton fallend.*

2.2 Martingale

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 2.2.1. *Eine Familie $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ von Sub-σ-Algebren von $\mathscr{F}$ heißt eine Filtration, falls $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$ für alle $0 \leq s \leq t < \infty$.*

Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ eine Filtration.

Definition 2.2.2. *Ein stochastischer Prozess X heißt adaptiert, falls für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ die Zufallsvariable X_t bezüglich $\mathscr{F}_t$ messbar ist.*

Definition 2.2.3. *Es sei X ein adaptierter Prozess mit $X_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

(a) X heißt ein Martingal, falls

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] = X_s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

(b) X heißt ein Submartingal, falls

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] \geq X_s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

(c) X heißt ein Supermartingal, falls

$$\mathbb{E}[X_t \,|\, \mathscr{F}_s] \leq X_s \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher} \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Definition 2.2.4. *Ein Martingal M heißt quadratintegrierbar, falls $M_t \in \mathscr{L}^2$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.*

Lemma 2.2.5. *Es sei M ein quadratintegrierbares Martingal. Dann gilt*

$$\operatorname{Cov}(M_t - M_s, M_v - M_u) = 0 \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t \leq u \leq v < \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(M_t - M_s, M_v - M_u) &= \mathbb{E}[(M_t - M_s)(M_v - M_u)] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_t - M_s)(M_v - M_u) \,|\, \mathscr{F}_u]] \\
&= \mathbb{E}[(M_t - M_s) \underbrace{\mathbb{E}[M_v - M_u \,|\, \mathscr{F}_u]}_{=0}] = 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 2.2.6. *Es sei M ein quadratintegrierbares Martingal. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2] \quad \text{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}[M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 \,|\, \mathscr{F}_s] - 2M_s\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] + \mathbb{E}[M_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[M_t^2 \,|\, \mathscr{F}_s] - 2M_s^2 + M_s^2 = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s],\end{aligned}$$

und daher

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 \,|\, \mathscr{F}_s]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 \,|\, \mathscr{F}_s]] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2].$$

□

2.3 Der Satz von Hattendorf

Bekanntlich gilt $Y = \min\{T, \tau\}$.

Definition 2.3.1. *Wir definieren den Prozess*

$$N := \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}.$$

Bemerkung 2.3.2. *Dann gilt*

$$N_t = \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) = \mathbb{1}_{\{Y \le t\}} = \mathbb{1}_{[0,t]}(Y)$$

für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

Definition 2.3.3. *Wir definieren die kanonische Filtration $(\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ durch*

$$\mathscr{F}_t := \sigma(N_s : s \in [0,t]), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Bemerkung 2.3.4. *Dann gilt*

$$\mathscr{F}_t = \sigma(\{Y \le s\} : s \in [0,t]) = \sigma(\min\{Y,t\}) \vee \{Y = t\}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Die Filtration enthält also zur Zeit t genau die Information, mit der man entscheiden kann, ob und gegebenenfalls wann Y bis zur Zeit t eingetreten ist oder nicht.

Definition 2.3.5. *Die kumulierte Sterblichkeitsintensität für Y ist gegeben durch*

$$\Lambda_Y(t) := \int_{(0,t]} \frac{1}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u).$$

Ist Y absolutstetig mit Dichte f_Y, so definieren wir die Sterblichkeitsintensität

$$\lambda_Y(t) := \frac{f_Y(t)}{1 - F_Y(t)}.$$

Lemma 2.3.6. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) Es gilt $\lim_{t\uparrow\tau} \Lambda_Y(t) = \infty$.

(ii) Es gilt entweder $\tau = \infty$ *oder sowohl* $\tau < \infty$ *als auch* $F_Y(\tau-) = 1$.

Beweis. Übung. □

Betrachten wir kurz die Situation $\tau < \infty$ und $F_Y(\tau-) = 1$. Dann gilt $\tau = t_{\max}$. In der Tat, wegen $\tau \in (0, t_{\max}]$ gilt $\tau \le t_{\max}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T > \tau) &\le \mathbb{P}(\min\{T, \tau\} = \tau) = \mathbb{P}(Y = \tau)\\ &= 1 - \mathbb{P}(Y < \tau) = 1 - F_Y(\tau-) = 0,\end{aligned}$$

und es folgt

$$t_{\max} = \sup\{t \in \mathbb{R}_+ : \mathbb{P}(T > t) > 0\} \le \tau.$$

Also ist τ das maximale Restalter. Damit ist anschaulich klar, dass für $t \uparrow \tau$ die kumulierte Sterblichkeitsintensität zur Zeit t gegen ∞ geht.

Bemerkung 2.3.7. *Bekanntlich gilt*

$$F_Y = F\mathbb{1}_{[0,\tau)} + \mathbb{1}_{[\tau,\infty)}$$

und

$$\begin{aligned}F_Y(ds) &= \mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)F(ds) + (1 - F(\tau-))\delta_\tau(ds)\\ &= \mathbb{1}_{[0,\tau)}(s)F(ds) + (1 - F_Y(\tau-))\delta_\tau(ds).\end{aligned}$$

Lemma 2.3.8. *Falls* $\tau < \infty$, *so gilt*

$$\Delta\Lambda_Y(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{falls } F(\tau-) < 1,\\ 0, & \text{falls } F(\tau-) = 1.\end{cases}$$

Beweis. Es gilt $\Delta F_Y(\tau) = 1 - F(\tau-)$ und

$$\begin{aligned}\Delta\Lambda_Y(\tau) &= \lim_{h\downarrow 0}\big(\Lambda_Y(\tau) - \Lambda_Y(\tau - h)\big) = \lim_{h\downarrow 0}\int_{(\tau-h,\tau]}\frac{1}{1 - F_Y(u-)}dF_Y(u)\\ &= \int_{\{\tau\}}\frac{1}{1 - F_Y(u-)}dF_Y(u).\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.9. *Wir nehmen ab sofort an, dass* $F(\tau-) < 1$, *sofern* $\tau < \infty$.

Lemma 2.3.10. *Es sei $A \subset (s,\infty)$ ein Teilintervall für ein $s \in [0,\tau)$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(Y \in A \,|\, \mathscr{F}_s) = \frac{\mathbb{P}(Y \in A)}{1 - F_Y(s)} \mathbb{1}_{\{Y>s\}} \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis. Die Zufallsvariable auf der rechten Seite ist $\mathscr{F}_s$-messbar. Das Mengensystem

$$\mathscr{G}_s = \{\{Y > r\} : r \in [0,s]\}$$

ist ein $\cap$-stabiles Mengensystem mit $\mathscr{F}_s = \sigma(\mathscr{G}_s)$. Außerdem gilt für jedes $r \in [0,s]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{\mathbb{P}(Y \in A)}{1 - F_Y(s)} \mathbb{1}_{\{Y>s\}} \mathbb{1}_{\{Y>r\}}\right] &= \frac{\mathbb{P}(Y \in A)}{\mathbb{P}(Y > s)} \mathbb{P}(\{Y > r\} \cap \{Y > s\}) \\ &= \mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Y \in A\}} \mathbb{1}_{\{Y>r\}}],\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $A \subset (s,\infty) \subset (r,\infty)$, und somit

$$\{Y \in A\} \cap \{Y > r\} = \{Y \in A\}.$$

□

Definition 2.3.11. *Wir definieren den Prozess M durch*

$$M_t := N_t - \int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Hierbei nennen wir den Prozess

$$\left(\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u)\right)_{t\in\mathbb{R}_+} = \left(\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} \frac{1}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u)\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$$

den Kompensator von N.

Im Rahmen der allgemeinen Semimartingal-Theorie stochastischer Prozesse ist dieser Prozess der previsible Kompensator N^p.

Bemerkung 2.3.12. *Für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\begin{aligned}\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u) &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[\![0,Y]\!]}(u) d\Lambda_Y(u) \\ &= \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y) d\Lambda_Y(u) = \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{\{u\le Y\}} d\Lambda_Y(u).\end{aligned}$$

Ist Y absolutstetig mit Dichte f_Y, so gilt

$$\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u) = \int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} \lambda_Y(u) du.$$

Satz 2.3.13.

(a) *M ist ein rechtsstetiges Martingal mit $M_0 = 0$ und $M_t = M_Y$ für alle $t \geq Y$.*

(b) *Falls $\tau < \infty$, so ist M stetig im Punkte τ.*

Beweis.

(a) Wegen $Y > 0$ und $F(0) = 0$ gilt

$$M_0 = \mathbb{1}_{\{0\}}(Y) - \Lambda_Y(\{0\}) = 0.$$

Weiterhin gilt für $t \geq Y$

$$N_t = 1 = N_Y \quad \text{und}$$
$$\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u) = \int_{[\![0,Y]\!]} d\Lambda_Y(u),$$

und daher $M_t = M_Y$.

Es ist klar, dass M ein adaptierter Prozess ist. Außerdem gilt $M_t \in \mathscr{L}^1$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. In der Tat, es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|M_t|] &\leq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,t]}(Y)] + \mathbb{E}[\Lambda_Y(Y \wedge t)] \\
&= \mathbb{P}(Y \in [0,t]) + \mathbb{E}\left[\int_{[0,t]} \mathbb{1}_{[\![0,Y]\!]}(u) d\Lambda_Y(u)\right] \\
&= F_Y(t) + \int_{[0,t]} \mathbb{P}(Y \geq u) \frac{1}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u) \\
&= F_Y(t) + F_Y(t) = 2F_Y(t) \leq 2.
\end{aligned}$$

Falls $\tau < \infty$, so gilt $M_t = M_\tau$ für alle $t \geq \tau$. Daher genügt es, zu zeigen, dass $\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] = M_s$ $\mathbb{P}$-fast sicher für alle $0 \leq s < t < \infty$ mit $t \leq \tau$. Mit Hilfe des Satzes von Fubini für bedingte Erwartungen erhalten wir $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t \,|\, \mathscr{F}_s] &= \mathbb{E}[N_t \,|\, \mathscr{F}_s] - \mathbb{E}\left[\int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u) \,\middle|\, \mathscr{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[0,t]}(Y) \,|\, \mathscr{F}_s] - \int_{[0,t]} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y) \,|\, \mathscr{F}_s] d\Lambda_Y(u) \\
&= \mathbb{1}_{[0,s]}(Y) - \int_{[0,s]} \mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y) d\Lambda_Y(u) \\
&\quad + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(s,t]}(Y) \,|\, \mathscr{F}_s] - \int_{(s,t]} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y) \,|\, \mathscr{F}_s] d\Lambda_Y(u) \\
&= M_s + \mathbb{P}(Y \in (s,t] \,|\, \mathscr{F}_s) - \int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y \in [u,\infty) \,|\, \mathscr{F}_s) d\Lambda_Y(u).
\end{aligned}$$

Zweimalige Anwendung von Lemma 2.3.10 ergibt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\begin{aligned}\int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y \in [u,\infty) \,|\, \mathscr{F}_s) d\Lambda_Y(u) &= \int_{(s,t]} \frac{\mathbb{P}(Y \in [u,\infty))}{1-F_Y(s)} \mathbb{1}_{\{Y>s\}} d\Lambda_Y(u) \\ &= \mathbb{1}_{\{Y>s\}} \int_{(s,t]} \frac{1-F_Y(u-)}{1-F_Y(s)} \frac{1}{1-F_Y(u-)} dF_Y(u) \\ &= \frac{\mathbb{P}(Y \in (s,t])}{\mathbb{P}(Y>s)} \mathbb{1}_{\{Y>s\}} = \mathbb{P}(Y \in (s,t] \,|\, \mathscr{F}_s).\end{aligned}$$

Die Rechtsstetigkeit des Martingals M ergibt sich sofort aus Definition 2.3.11.

(b) Es gelte $\tau < \infty$. Wir setzen

$$N_t^p := \int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} d\Lambda_Y(u), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Dann gilt $M = N - N^p$. Nach Definition 2.3.1 gilt außerdem $N = \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}$. Falls $Y < \tau$, so gilt $\Delta N_\tau = \Delta N_\tau^p = 0$, und daher $\Delta M_\tau = 0$. Falls $Y = \tau$, so gilt $\Delta N_\tau = 1$. Wegen $F_Y(\tau-) < 1$ gilt nach Lemma 2.3.8, dass $\Delta\Lambda_Y(\tau) = 1$. Also gilt $\Delta M_\tau = 0$.

□

Im Beweis von Satz 2.3.13 hatten wir benutzt:

Satz 2.3.14 (Satz von Fubini für bedingte Erwartungen)**.** *Es seien $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X, \mathscr{X}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Es sei $f : (\Omega \times X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{X}) \to \mathbb{R}_+$ eine produktmessbare, nichtnegative, beschränkte Funktion. Weiterhin seien $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ eine Sub-σ-Algebra, und es sei $g : (\Omega \times X, \mathscr{G} \otimes \mathscr{X}) \to \mathbb{R}_+$ eine produktmessbare, nichtnegative, beschränkte Funktion, so dass für jedes $x \in X$ die Abbildung $g(\cdot,x) : (\Omega, \mathscr{G}) \to \mathbb{R}_+$ eine Version der bedingten Erwartung $\mathbb{E}[f(\cdot,x) \,|\, \mathscr{G}]$ ist. Dann gilt*

$$\mathbb{E}\left[\int_X f(\cdot,x)\mu(dx) \,\middle|\, \mathscr{G} \right] = \int_X g(\cdot,x)\mu(dx) \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beweis. Nach dem Satz von Fubini ist

$$\int_X f(\cdot,x)\mu(dx) : \Omega \to \mathbb{R}_+$$

beschränkt und $\mathscr{F}$-messbar, und

$$\int_X g(\cdot,x)\mu(dx) : \Omega \to \mathbb{R}_+$$

ist beschränkt und $\mathscr{G}$-messbar. Außerdem gilt für jede nichtnegative, $\mathscr{G}$-messbare Zufallsvariable $Z : \Omega \to \mathbb{R}_+$ nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[Z\int_X f(\cdot,x)\mu(dx)\Big] &= \int_X \mathbb{E}[Zf(\cdot,x)]\mu(dx)\\ &= \int_X \mathbb{E}[Zg(\cdot,x)]\mu(dx) = \mathbb{E}\Big[Z\int_X g(\cdot,x)\mu(dx)\Big].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.15. *Beim Beweis von Satz 2.3.13 hatten wir den Satz von Fubini für bedingte Erwartungen (Satz 2.3.14) für $0 \le s < t < \infty$ angewandt mit*

$$\begin{aligned}(X,\mathscr{X},\mu) &= ((s,t],\mathcal{B}((s,t]),\Lambda_Y(du)),\\ f(\cdot,u) &= \mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y),\\ \mathscr{G} &= \mathscr{F}_s\\ g(\cdot,u) &= \frac{\mathbb{P}(Y\in[u,\infty))}{1-F_Y(s)}\mathbb{1}_{\{Y>s\}},\end{aligned}$$

und so hatten wir erhalten

$$\mathbb{E}\Big[\int_{(s,t]}\mathbb{1}_{[u,\infty)}(Y)d\Lambda_Y(u)\mid\mathscr{F}_s\Big] = \int_{(s,t]}\frac{\mathbb{P}(Y\in[u,\infty))}{1-F_Y(s)}\mathbb{1}_{\{Y>s\}}d\Lambda_Y(u)\quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Beispiel 2.3.16. *Wir nehmen an, dass $\tau = \infty$ und $T \sim \mathrm{Exp}(1)$ (reine Todesfallversicherung). Dann gilt auch $Y \sim \mathrm{Exp}(1)$, und für alle $t \in \mathbb{R}_+$ gilt*

$$\begin{aligned}F_Y(t) &= 1-\exp(-t),\\ f_Y(t) &= \exp(-t),\\ \lambda_Y(t) &= \frac{f_Y(t)}{1-F_Y(t)} = \frac{\exp(-t)}{1-(1-\exp(-t))} = 1.\end{aligned}$$

Also gilt nach Bemerkung 2.3.12

$$\begin{aligned}M_t &= \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} du\\ &= \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \Big(t\mathbb{1}_{[\![0,Y[\![}(t) + Y\mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t)\Big)\\ &= -t\mathbb{1}_{[\![0,Y[\![}(t) + (1-Y)\mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t).\end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit Satz 2.3.13 gilt für jedes $t \in \mathbb{R}_+$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t] &= \mathbb{E}\big[-t \mathbb{1}_{[\![0,Y[\![}(t) + (1-Y)\mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t)\big] \\
&= -t\mathbb{P}(Y > t) + \mathbb{E}[(1-Y)\mathbb{1}_{[0,t]}(Y)] \\
&= -t\exp(-t) + \int_0^t (1-u)\exp(-u)du \\
&= -t\exp(-t) + \Big(1 - \exp(-t)\Big) + \Big(t\exp(-t) + \exp(-t) - 1\Big) = 0.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.3.17. *Wir nehmen an, dass $\tau = \infty$ und dass T diskret verteilt ist mit*

$$\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}(T = 2) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt

$$F_Y = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,2)} + \mathbb{1}_{[2,\infty)}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
M_t &= \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \int_{[\![0,t\wedge Y]\!]} \frac{1}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u) \\
&= \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t \wedge Y) + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(t \wedge Y)\right) \\
&= \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \left(\frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t) + \mathbb{1}_{[2,\infty)}(t)\mathbb{1}_{\{Y=2\}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\big(\mathbb{1}_{\{Y=1\}} - \mathbb{1}_{\{Y=2\}}\big)\mathbb{1}_{[1,\infty)}(t).
\end{aligned}$$

Hieraus sehen wir auch

$$\mathbb{E}[M_t] = 0 \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 2.3.18. *M ist ein quadratintegrierbares Martingal, und es gilt*

$$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] = \int_{(s,t]} (1 - \Delta\Lambda_Y(u))dF_Y(u) \quad \textit{für alle } 0 \leq s \leq t < \infty.$$

Beweis. Es gilt

$$M_t = \mathbb{1}_{\{Y \leq t\}} - \int_{(0,t]} \mathbb{1}_{\{u \leq Y\}} d\Lambda_Y(u).$$

Also gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] &= \mathbb{E}\Bigg[\bigg(\mathbb{1}_{\{s<Y\le t\}} - \int_{(s,t]} \mathbb{1}_{\{u\le Y\}} d\Lambda_Y(u)\bigg)^2\Bigg] \\ &= \mathbb{E}\big[\mathbb{1}_{\{s<Y\le t\}}\big] - 2\mathbb{E}\bigg[\int_{(s,t]} \mathbb{1}_{\{s<Y\le t\}}\mathbb{1}_{\{u\le Y\}} d\Lambda_Y(u)\bigg] \\ &\quad + \mathbb{E}\bigg[\int_{(s,t]}\int_{(s,t]} \mathbb{1}_{\{u\le Y\}}\mathbb{1}_{\{v\le Y\}} d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v)\bigg] \\ &= F_Y(t) - F_Y(s) - 2\int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y\in[u,t]) d\Lambda_Y(u) \\ &\quad + \int_{(s,t]}\int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y \ge \max\{u,v\}) d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v).\end{aligned}$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}&\int_{(s,t]}\int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y \ge \max\{u,v\}) d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v) \\ &= \int_{(s,t]}\int_{(s,v]} \mathbb{P}(Y\ge v) d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v) + \int_{(s,t]}\int_{(v,t]} \mathbb{P}(Y\ge u) d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v) \\ &= \int_{(s,t]}\int_{[u,t]} \mathbb{P}(Y\ge v) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) + \int_{(s,t]}\int_{(v,t]} \mathbb{P}(Y\ge u) d\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(v) \\ &= \int_{(s,t]}\int_{[u,t]} \mathbb{P}(Y\ge v) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) + \int_{(s,t]}\int_{[u,t]} \mathbb{P}(Y\ge v) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) \\ &\quad - \int_{(s,t]}\int_{\{u\}} \mathbb{P}(Y\ge v) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) \\ &= 2\int_{(s,t]}\int_{[u,t]} (1-F_Y(v-)) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) - \int_{(s,t]} (1-F_Y(u-))\Delta\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(u).\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass beide Integrale endlich sind. Wegen

$$\Lambda_Y(dv) = \frac{1}{1-F_Y(v-)} dF_Y(v)$$

gilt

$$\begin{aligned}&\int_{(s,t]}\int_{[u,t]} (1-F_Y(v-)) d\Lambda_Y(v) d\Lambda_Y(u) = \int_{(s,t]}\int_{[u,t]} dF_Y(v) d\Lambda_Y(u) \\ &= \int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y\in[u,t]) d\Lambda_Y(u) = \int_{(s,t]} \frac{F_Y(t)-F_Y(u-)}{1-F_Y(u-)} dF_Y(u) \le 1.\end{aligned}$$

Wegen

$$\Delta\Lambda_Y(u) = \frac{\Delta F_Y(u)}{1 - F_Y(u-)} = \frac{F_Y(u) - F_Y(u-)}{1 - F_Y(u-)} \leq 1$$

gilt außerdem

$$\int_{(s,t]} (1 - F_Y(u-))\Delta\Lambda_Y(u) d\Lambda_Y(u) = \int_{(s,t]} \Delta\Lambda_Y(u) dF_Y(u) \leq 1.$$

Weiterhin folgt

$$\int_{(s,t]} \mathbb{P}(Y \in [u,t]) d\Lambda_Y(u) = \int_{(s,t]} \frac{F_Y(t) - F_Y(u-)}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u),$$

so dass dieses Integral insbesondere endlich ist. Wir erhalten $\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] < \infty$ mit

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] &= F_Y(t) - F_Y(s) - 2\int_{(s,t]} \frac{F_Y(t) - F_Y(u-)}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u) \\
&\quad + 2\int_{(s,t]} \frac{F_Y(t) - F_Y(u-)}{1 - F_Y(u-)} dF_Y(u) - \int_{(s,t]} \Delta\Lambda_Y(u) dF_Y(u) \\
&= \int_{(s,t]} (1 - \Delta\Lambda_Y(u)) dF_Y(u).
\end{aligned}$$

□

Ein stetiger linearer Operator $T \in L(X,Y)$ zwischen zwei normierten Räumen X und Y heißt bekanntlich eine Isometrie, falls

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sind X und Y Hilberträume, dann ist $T \in L(X,Y)$ genau dann eine Isometrie, wenn

$$\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

Sind $\mathcal{E} \subset X$ ein dichter Unterraum und $T \in L(X,Y)$ ein stetiger linearer Operator, so dass

$$\|Tx\| = \|x\| \quad \text{für alle } x \in \mathcal{E},$$

dann ist T eine Isometrie. In der Tat, für jedes $x \in X$ existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$, so dass $x_n \to x$, und es folgt

$$\|Tx\| = \left\| T\Big(\lim_{n\to\infty} x_n\Big) \right\| = \left\| \lim_{n\to\infty} Tx_n \right\| = \lim_{n\to\infty} \|Tx_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|.$$

Satz 2.3.19. *Für jedes* $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (1-\Delta\Lambda_Y)dF_Y)$ *gilt*

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_{\mathbb{R}_+} f(u)dM_u\Big)^2\bigg] = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)^2(1-\Delta\Lambda_Y(u))dF_Y(u).$$

Mit anderen Worten, die lineare Abbildung

$$I : L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (1-\Delta\Lambda_Y)dF_Y) \to L^2(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}), \quad I(f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u)dM_u$$

ist eine Isometrie zwischen Hilberträumen.

Beweis. Es sei $\mathcal{E}$ der Raum aller Treppenfunktionen

$$f = \sum_{j=1}^n c_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und $0 \le t_1 < \ldots < t_{n+1}$. Da $\mathcal{E}$ dicht in

$$L^2(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), (1-\Delta\Lambda_Y)dF_Y)$$

liegt, genügt es, zu zeigen, dass I eine Isometrie auf $\mathcal{E}$ ist. Sei also $f \in \mathcal{E}$ beliebig. Dann gilt mit Lemma 2.2.5 und Satz 2.3.18

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_{\mathbb{R}_+} f(u)dM_u\Big)^2\bigg] = \mathbb{E}\bigg[\Big(\sum_{j=1}^n c_j(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})\Big)^2\bigg] \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j c_k \mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})(M_{t_{k+1}} - M_{k_l})] = \sum_{j=1}^n c_j^2 \mathbb{E}[(M_{t_{j+1}} - M_{t_j})^2] \\
&= \sum_{j=1}^n c_j^2 \int_{(t_j, t_{j+1}]} (1-\Delta\Lambda_Y(u))dF_Y(u) = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{j=1}^n c_j^2 \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(u)(1-\Lambda_Y(u))dF_Y(u) \\
&= \int_{\mathbb{R}_+} f(u)^2(1-\Delta\Lambda_Y(u))dF_Y(u).
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.20. *Man kann zeigen, dass die previsible quadratische Variation* $\langle M, M\rangle$ *gegeben ist durch*

$$\langle M, M\rangle_t = \int_{(0,t]} (1-\Delta\Lambda_Y(u))dF_Y(u), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Also bestätigt Satz 2.3.19 die bekannte Itô-Isometrie

$$\mathbb{E}\bigg[\Big(\int_0^t H_s dM_s\Big)^2\bigg] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s\bigg], \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Der Barwert eines LVV war definiert durch

$$B = \frac{A(Y)}{K(Y)} - \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s),$$

und nach dem Äquivalenzprinzip gilt $\mathbb{E}[B] = 0$. Wir nehmen nun immer an, dass

$$\mathbb{E}\left[\frac{A(Y)}{K(Y)}\right] < \infty.$$

Definition 2.3.21. *Der* <u>*Verlust*</u> *des Versicherungsunternehmens bis zur Zeit* $t \in \mathbb{R}_+$ *ist definiert durch*

$$L(t) := \mathbb{E}[B \mid \mathscr{F}_t].$$

Bemerkung 2.3.22. *Der Verlust ist also der bedingte erwartete Barwert, gegeben die Information, ob der Leistungszeitpunkt* Y *bis zur Zeit* t *eingetreten ist oder nicht.*

Satz 2.3.23. *Für jedes* $t \in \mathbb{R}_+$ *gilt* $\mathbb{P}$*-fast sicher*

$$L(t) = \left(\frac{A(Y)}{K(Y)} - \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s)\right) \mathbb{1}_{\{Y \leq t\}} + \left(\frac{V(t)}{K(t)} - \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s)\right) \mathbb{1}_{\{Y > t\}}.$$

Beweis. Übung. □

Bemerkung 2.3.24. *In Hinblick auf die Definition des Barwertes liefert Satz 2.3.23 eine intuitive Charakterisierung des Verlustes bis zur Zeit* t*. Genauer:*

- *Falls* $t \geq Y$*, der Leistungszeitpunkt also bereits eingetreten ist, so erhalten wir die bekannte Definition des Barwertes.*
- *Falls* $t < Y$*, der Leistungszeitpunkt also noch bevorsteht, so erhalten wir eine analoge Darstellung, bei der* Y *durch* t *ersetzt ist. Außerdem ist das Auszahlungsspektrum* A *durch das Nettodeckungskapital* V *ersetzt. Dies ist intuitiv klar, da der Leistungszeitpunkt ja noch nicht eingetreten, und vom Versicherungsunternehmen abzudecken ist.*

Bemerkung 2.3.25. L *ist ein Martingal mit* $L(0) = 0$ *und* $\lim_{t\to\infty} L(t) = B$ $\mathbb{P}$*-fast sicher.*

Das Martingal L ist gemäß Definition 2.3.21 zu jedem Zeitpunkt t nur $\mathbb{P}$-fast sicher eindeutig bestimmt. Aus der Theorie stochastischer Prozesse ist bekannt, dass L eine càdlàg-Version (und damit insbesondere eine rechtsstetige Version) besitzt. In der vorliegenden Situation können wir eine solche Version explizit hinschreiben:

Satz 2.3.26. *Für jedes $t \in \mathbb{R}_+$ gilt die Darstellung*

$$L(t) = \int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} dM_u \quad \mathbb{P}\text{-fast sicher.}$$

Insbesondere hat L eine rechtsstetige Version.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} dM_u &= \int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} dN_u - \int_{]\!]0,t\wedge Y]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \\
&= \frac{A(Y) - V(Y)}{K(Y)} \mathbb{1}_{[\![Y,\infty[\![}(t) - \int_{]\!]0,t\wedge Y]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \\
&= \left(\frac{A(Y)}{K(Y)} - \frac{V(Y)}{K(Y)} - \int_{]\!]0,Y]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \right) \mathbb{1}_{\{Y\le t\}} \\
&\quad - \left(\int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \right) \mathbb{1}_{\{Y>t\}}.
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.3.23 ist also zu zeigen

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A(Y)}{K(Y)} - \int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) \right) \mathbb{1}_{\{Y\le t\}} \\
&= \left(\frac{A(Y)}{K(Y)} - \frac{V(Y)}{K(Y)} - \int_{]\!]0,Y]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \right) \mathbb{1}_{\{Y\le t\}} \\
\iff \quad &\left(\int_{[\![0,Y[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) \right) \mathbb{1}_{\{Y\le t\}} = \left(\frac{V(Y)}{K(Y)} + \int_{]\!]0,Y]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \right) \mathbb{1}_{\{Y\le t\}}
\end{aligned}$$

und

$$\left(\frac{V(t)}{K(t)} - \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) \right) \mathbb{1}_{\{Y>t\}} = -\left(\int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u) \right) \mathbb{1}_{\{Y>t\}}$$

Also ist zu zeigen

$$\frac{V(Y\wedge t)}{K(Y\wedge t)} = \int_{[\![0,Y\wedge t[\![} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) - \int_{]\!]0,Y\wedge t]\!]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda_Y(u).$$

Nach der Thieleschen Integralgleichung (Satz 1.2.34) gilt

$$\frac{V(t)}{K(t)} = \int_{[0,t)} \frac{1}{K(s)} d\Pi(s) - \int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} d\Lambda(u), \quad t \in [0,\tau).$$

Im Fall $\tau < \infty$ beachten wir noch:

- M ist nach Satz 2.3.13(b) im Punkte τ stetig. Also ist die rechte Seite der behaupteten Gleichung auch im Punkte τ stetig.

- L ist im Punkte τ stetig. Dies folgt aus der Darstellung in Satz 2.3.23, sowie Lemma 1.2.27.

Abschließend folgt die behauptete Rechtsstetigkeit aus der Rechtsstetigkeit von M; siehe Satz 2.3.13(a). □

Definition 2.3.27. *Es sei $(t_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge mit $t_0 = 0$ und $t_{i-1} < t_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Hierbei sind $t_{i-1} < t_i$ Zeitpunkte des Beginns bzw. Endes von Versicherungsperioden. Wir setzen*

$$L^i := L(t_i) - L(t_{i-1}), \quad i \in \mathbb{N}$$

für den Verlust der i-ten Versicherungsperiode.

Satz 2.3.28 (Satz von Hattendorf)**.** *Für den Verlust eines LVV unter dem Äquivalenzprinzip gilt*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[L(t)] &= 0 \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+ \textit{ und} \\ \mathbb{E}[L^i] &= 0 \quad \textit{für alle } i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ist zudem

$$\int_{[0,t]} \left(\frac{A(u) - V(u)}{K(u)} \right)^2 (1 - \Delta\Lambda_Y(u)) dF_Y(u) < \infty \quad \textit{für alle } t \in \mathbb{R}_+,$$

so gelten zusätzlich folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\mathbb{E}[L^{j+1} \,|\, \mathscr{F}_{t_j}] = 0$.

(b) Es gilt $\operatorname{Cov}(L^j, L^k) = 0$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$.

(c) Für die Varianz des Verlustes gilt

$$\operatorname{Var}[L(t)] = \int_{[0,t]} \left(\frac{A(u) - V(u)}{K(u)} \right)^2 (1 - \Delta\Lambda_Y(u)) dF_Y(u), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

(d) Für die Varianz des Barwertes gilt

$$\operatorname{Var}[B] = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{A(u) - V(u)}{K(u)} \right)^2 (1 - \Delta\Lambda_Y(u)) dF_Y(u) \in [0, \infty].$$

Beweis. Nach Bemerkung 2.3.25 ist L ein Martingal, so dass die ersten beiden Identitäten folgen. Nun gelte die Integrierbarkeitsbedingung.

(a) Folgt, da L ein Martingal ist.

(b) Folgt mit Lemma 2.2.5, da L ein quadratintegrierbares Martingal ist.

(c) Nach Satz 2.3.26 gilt

$$L(t) = \int_{(0,t]} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} dM_u, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Also folgt die behauptete Formel aus Satz 2.3.19 mit der Funktion

$$f(u) = \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} \mathbb{1}_{[0,t]}.$$

(d) Nach Satz 2.3.26 und Bemerkung 2.3.25 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$B = \lim_{t \to \infty} L(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{A(u) - V(u)}{K(u)} dM_u.$$

Also folgt die behauptete Formel aus Satz 2.3.19 mit der Funktion

$$f(u) = \frac{A(u) - V(u)}{K(u)}.$$

$\square$

Bemerkung 2.3.29. *Die Gesamtvarianz des Verlustes läßt sich also in die Summe der Varianzen der einzelnen Versicherungsperioden aufspalten.*

Kapitel 3

Statische Modelle

Bei statischen Modellen werden die gesamten Schäden über eine feste Periode, etwa ein Jahr, aus Sicht des Versicherungsunternehmens (VU) modelliert.

3.1 Modelle für den Gesamtschaden in einer Versicherungsperiode

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

3.1.1 Individuelles Modell

Wir betrachten ein Portfolio mit $n \in \mathbb{N}$ versicherten Risiken (Versicherungsverträgen). Es seien $Y_1, \ldots, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ unabhängige, nichtnegative Zufallsvariablen. Hierbei ist Y_i die (zufällige) Schadenhöhe der i-ten Police.

Definition 3.1.1. *Der Gesamtschaden des ganzen Portfolios im individuellen Modell ist gegeben durch*

$$S_{\text{ind}} := \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Bemerkung 3.1.2. *Wegen der Unabhängigkeit gilt*

$$\mathbb{P} \circ (Y_1, \ldots, Y_n) = (\mathbb{P} \circ Y_1) \otimes \ldots \otimes (\mathbb{P} \circ Y_n).$$

3.1.2 Kollektives Modell

Es sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von positiven Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to (0, \infty)$. Weiterhin sei $N : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine ganzzahlige Zufallsvariable.

Definition 3.1.3. *Der Gesamtschaden im kollektiven Modell ist gegeben durch*

$$S_{\text{koll}} := \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Bemerkung 3.1.4. *Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_N > 0$ sind die in der Versicherungsperiode auftretenden Schäden, deren Anzahl $N \in \mathbb{N}_0$ nun zufällig ist. Die Schadenhöhen sind hierbei nicht mehr individuellen Policen zugeordnet.*

Definition 3.1.5. *Wir sprechen von einem Standardmodell der kollektiven Risikotheorie, wenn die Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $X_1 \in \mathscr{L}^1$ und $F_{X_1}(0) = 0$ sind, und wenn die Zufallsvariable N unabhängig von der Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist.*

3.1.3 Modelle für die Schadenhöhenverteilung

Zur Modellierung der Verteilung der Schadenhöhen X_i verwendet man gerne absolutstetige Verteilungen mit unimodalen Dichten auf $(0, \infty)$.

Definition 3.1.6. *Eine Funktion $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}_+$ heißt unimodal mit Modus bei $x \in (0, \infty)$, falls f auf $(0, x)$ streng monoton wachsend, und auf (x, ∞) streng monoton fallend ist.*

Es folgen einige wichtige Schadenhöhenverteilungen.

Beispiel 3.1.7. *Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ für $\alpha, \beta > 0$ hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, \quad x > 0,$$

wobei

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Es gilt:

- *Für $\alpha \leq 1$ ist f monoton fallend.*
- *Für $\alpha > 1$ ist f unimodal mit Modus bei*

$$\frac{\alpha - 1}{\beta}.$$

- $\Gamma(1, \beta) = \mathrm{Exp}(\beta)$.

Man bezeichnet α als Formparameter und β als Skalenparameter.

Beispiel 3.1.8. *Die Weibull-Verteilung* $\mathrm{WB}(c,\tau)$ *für* $c,\tau > 0$ *hat die Dichte*

$$f(x) = c\tau x^{\tau-1}e^{-cx^\tau}, \quad x > 0.$$

Es gilt:

- *Für* $\tau \leq 1$ *ist* f *monoton fallend.*
- *Für* $\tau > 1$ *ist* f *unimodal mit Modus bei*

$$\left(\frac{\tau-1}{c\tau}\right)^{1/\tau}.$$

- $\mathrm{WB}(c,1) = \mathrm{Exp}(c)$.

Man bezeichnet τ als Formparameter und c als Skalenparameter.

Beispiel 3.1.9. *Die Log-Normalverteilung* $\mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ *für* $\mu \in \mathbb{R}$ *und* $\sigma^2 > 0$ *hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 x}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

Es gilt:

- f *ist stets unimodal mit Modus bei* e^μ.
- *Für* $X \sim \mathrm{LN}(\mu,\sigma^2)$ *gilt* $\ln X \sim \mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

Beispiel 3.1.10. *Die Log-Gammaverteilung* $\mathrm{L}\Gamma(\alpha,\beta)$ *für* $\alpha,\beta > 0$ *hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}(\ln x)^{\alpha-1}x^{-(\beta+1)}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(x), \quad x > 0.$$

Es gilt:

- *Für* $X \sim \mathrm{L}\Gamma(\alpha,\beta)$ *gilt* $\ln X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$.

Beispiel 3.1.11. *Die Burr-Verteilung* $\mathrm{Burr}(\alpha,\tau,\sigma)$ *für* $\alpha,\tau,\sigma > 0$ *hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{\alpha\tau}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau-1}\left(1 + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^\tau\right)^{-(\alpha+1)}, \quad x > 0.$$

Es gilt:

- *Für $\tau \geq 1$ ist f monoton fallend.*
- *Für $\tau < 1$ ist f unimodal.*
- *Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch*

$$F(x) = 1 - \left(1 + \left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\tau}\right)^{-\alpha}, \quad x > 0.$$

Beispiel 3.1.12. *Die Pareto-Verteilung (Typ I)* $\mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ *für* $\kappa, \alpha > 0$ *hat die Dichte*

$$f(x) = \frac{\alpha \kappa^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x), \quad x > 0.$$

Es gilt:

- *Die Verteilungsfunktion ist gegeben durch*

$$F(x) = \left(1 - \frac{\kappa^{\alpha}}{x^{\alpha}}\right) \mathbb{1}_{[\kappa,\infty)}(x), \quad x > 0.$$

- *Für* $\alpha > 1$ *und* $X \sim \mathrm{Par}(\kappa, \alpha)$ *gilt*

$$\mathbb{E}[X] = \frac{\alpha \kappa}{\alpha - 1}.$$

3.1.4 Modelle für die Schadenanzahlverteilung

Folgende Modelle für die Verteilung der Schadenanzahl N sind populär.

Beispiel 3.1.13. *Die Binomialverteilung* $\mathrm{Bi}(n, p)$ *mit Parametern* $n \in \mathbb{N}$ *und* $p \in [0, 1]$ *hat den stochastischen Vektor*

$$\pi(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Es gilt $\mathrm{Bi}(1, p) = \mathrm{Ber}(p)$.

Beispiel 3.1.14. *Die Poisson-Verteilung* $\mathrm{Pois}(\lambda)$ *mit Parameter* $\lambda > 0$ *hat den stochastischen Vektor*

$$\pi(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung 3.1.15. *Nach dem Grenzwertsatz von Poisson gilt*

$$\mathrm{Bi}\Big(n, \frac{\lambda}{n}\Big) \xrightarrow{w} \mathrm{Pois}(\lambda) \quad \textit{für jedes } \lambda > 0.$$

Es gilt also

$$\mathrm{Bi}(n,p) \approx \mathrm{Pois}(np) \quad \textit{für große } n \in \mathbb{N} \textit{ und kleine } p \in (0,1).$$

Die Poisson-Verteilung ist also gut für große Portfolios mit kleinen Schadenswahrscheinlichkeiten geeignet.

Beispiel 3.1.16. *Die negative Binomialverteilung* $\mathrm{NB}(\beta, p)$ *mit Parametern* $\beta > 0$ *und* $p \in (0,1)$ *hat den stochastischen Vektor*

$$\pi(k) = \binom{\beta + k - 1}{k} p^\beta (1-p)^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei

$$\binom{\beta + k - 1}{k} := \frac{(\beta + k - 1)(\beta + k - 2) \cdot \ldots \cdot \beta}{k!}.$$

Es gilt $\mathrm{NB}(1,p) = \mathrm{Geo}(p)$.

Falls $\beta \in \mathbb{N}$, so ist jedes $\pi(k)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei unabhängigen Bernoulli-Experimenten k Fehlversuche vor den ersten β Erfolgen auftreten.

3.2 Berechnung der Gesamtschadenverteilung

3.2.1 Faltungen und erzeugende Funktionen

Definition 3.2.1. *Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße* μ *und* ν *auf* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ *ist die Faltung* $\mu * \nu$ *definiert durch*

$$(\mu * \nu)(B) := \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B(x+y) \mu(dx) \nu(dy), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Definition 3.2.2. *Es seien* F *und* G *zwei Verteilungsfunktionen. Dann heißt die Funktion* $F * G$ *gegeben durch*

$$(F * G)(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-t) G(dt), \quad x \in \mathbb{R}$$

die Faltung von F *und* G.

Lemma 3.2.3. *Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktionen F und G. Dann ist die Verteilungsfunktion von $\mu * \nu$ gegeben durch $F * G$.*

Beweis. Es gilt

$$(\mu * \nu)((-\infty, t]) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(-\infty,t]}(x+y) F(dx) G(dy) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x+y \le t\}} F(dx) G(dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{x \le t-y\}} F(dx) G(dy) = \int_{\mathbb{R}} F(t-y) G(dy).$$

□

Satz 3.2.4. *Es seien X und Y zwei unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F und G.*

(a) Die Verteilungsfunktion von $X + Y$ ist gegeben durch $F * G$.

(b) Ist X absolutstetig mit Dichte f, so ist $X + Y$ absolutstetig mit Dichte

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) G(dt).$$

(c) Sind X und Y absolutstetig mit Dichten f und g, dann gilt

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) g(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Übung. □

Definition 3.2.5. *Es sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.*

(a) Wir setzen $\mu^{*0} := \delta_0$.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\mu^{*n} := \underbrace{\mu * \ldots * \mu}_{n \text{ mal}}.$$

Entsprechend führen wir ein:

Definition 3.2.6. *Es sei F eine Verteilungsfunktion.*

(a) Wir setzen $F^{*0} := \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$.

(b) *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir*

$$F^{*n} := \underbrace{F * \ldots * F}_{n \text{ mal}}.$$

Definition 3.2.7. *Es sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F.*

(a) *Die auf $\mathscr{M}_X := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[e^{tX}] < \infty\}$ definierte Funktion*

$$\psi_X : \mathscr{M}_X \to \mathbb{R}_+, \quad \psi_X(t) := \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} F(dx)$$

heißt die momentenerzeugende Funktion von X bzw. F.

(b) *Die auf $\mathscr{M}_X^p := \{t > 0 : \mathbb{E}[t^X] < \infty\}$ definierte Funktion*

$$\phi_X : \mathscr{M}_X^p \to \mathbb{R}_+, \quad \phi_X(t) := \mathbb{E}[t^X] = \int_{\mathbb{R}} t^x F(dx)$$

heißt die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X bzw. F.

(c) *Die Funktion*

$$\chi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \chi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} F(dx)$$

heißt die charakteristische Funktion von X bzw. F.

Bemerkung 3.2.8.

(a) *Man nennt $t \mapsto \psi_X(-t)$ auch die Laplace-Transformierte von X bzw. F.*

(b) *Die charakteristische Funktion wird oft auch als Fourier-Transformierte bezeichnet.*

Satz 3.2.9 (Eindeutigkeitssatz)**.**

(a) *Besitzt $\mathscr{M}_X$ einen inneren Punkt, so ist F durch ψ_X eindeutig bestimmt.*

(b) *Besitzt $\mathscr{M}_X^p$ einen inneren Punkt, so ist F durch ϕ_X eindeutig bestimmt.*

(c) *F ist durch χ_X eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wir beweisen Teil (b) für den Fall, dass X Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt. Dann gilt

$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) \quad \text{für alle } t \in (0,1).$$

Wegen der geometrischen Reihe läßt sich ϕ_X auf das Intervall $(-1,1)$ fortsetzen, und es folgt

$$\phi_X^{(n)}(0) = n!\mathbb{P}(X = n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

und daher

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0,$$

was die Eindeutigkeit der Verteilung von X beweist. □

Der Beweis zeigt, warum wir ϕ_X die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X nennen.

Satz 3.2.10. *Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen, und es sei*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(a) Es gilt

$$\psi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \psi_{X_k}(t), \quad t \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathscr{M}_{X_k}.$$

(b) Es gilt

$$\phi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t), \quad t \in \bigcap_{k=1}^{n} \mathscr{M}_{X_k}^{\mathfrak{p}}.$$

(c) Es gilt

$$\chi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \chi_{X_k}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Beweis.

(a) Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$\psi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{tS_n}] = \mathbb{E}\bigg[\prod_{k=1}^n e^{tX_k}\bigg] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{tX_k}] = \prod_{k=1}^n \psi_{X_k}(t).$$

(b) Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$\phi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[t^{S_n}] = \mathbb{E}\bigg[\prod_{k=1}^n t^{X_k}\bigg] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[t^{X_k}] = \prod_{k=1}^n \phi_{X_k}(t).$$

(c) Wegen der Unabhängigkeit der Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ gilt

$$\chi_{S_n}(t) = \mathbb{E}[e^{itS_n}] = \mathbb{E}\bigg[\prod_{k=1}^n e^{itX_k}\bigg] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[e^{itX_k}] = \prod_{k=1}^n \chi_{X_k}(t).$$

□

Satz 3.2.11. *Für $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ gilt*

$$\chi_X(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Satz 3.2.12. *Für unabhängige Zufallsvariablen $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ und $Y \sim \Gamma(\bar{\alpha}, \beta)$ gilt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \bar{\alpha}, \beta)$.*

Beweis. Nach Satz 3.2.10(c) und Satz 3.2.11 gilt für alle $t \in \mathbb{R}_+$

$$\chi_{X+Y}(t) = \chi_X(t)\chi_Y(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\bar{\alpha}} = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha+\bar{\alpha}}.$$

Mit dem Eindeutigkeitssatz (Satz 3.2.9(c)) folgt $X + Y \sim \Gamma(\alpha + \bar{\alpha}, \beta)$. □

Satz 3.2.13. *Es sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable.*

(a) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Bi}(n, p)$, dann gilt $\mathscr{M}_N^p = (0, \infty)$ und

$$\phi_N(t) = (1 - p + pt)^n.$$

(b) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Pois}(\lambda)$, dann gilt $\mathscr{M}_N^p = (0, \infty)$ und

$$\phi_N(t) = e^{-\lambda(1-t)}.$$

(c) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{NB}(\beta, p)$, *dann gilt* $\mathscr{M}_N^p = (0, \frac{1}{1-p})$ *und*

$$\phi_N(t) = \left(\frac{1-(1-p)t}{p}\right)^{-\beta}.$$

Beweis.

(a) Für jedes $t > 0$ gilt nach dem binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned}\phi_N(t) = \mathbb{E}[t^N] &= \sum_{k=0}^{n} t^k \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{n} t^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pt)^k (1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n.\end{aligned}$$

(b) Für jedes $t > 0$ gilt wegen der Exponentialreihe

$$\begin{aligned}\phi_N(t) = \mathbb{E}[t^N] &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{-\lambda(1-t)}.\end{aligned}$$

(c) Bekanntlich gilt

$$\binom{\alpha+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-\alpha}{k} \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } k \in \mathbb{N}_0.$$

und

$$(1+x)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k \quad \text{für alle } r > 0 \text{ und } x \in (-1,1).$$

Für jedes $t \in (0, \frac{1}{1-p})$ folgt

$$\begin{aligned}\phi_N(t) = \mathbb{E}[t^N] &= \sum_{k=0}^{\infty} t^k \mathbb{P}(N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{\beta+k-1}{k} p^\beta (1-p)^k \\ &= p^\beta \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\beta}{k} \big((1-p)t\big)^k = p^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\beta}{k} \big(-(1-p)t\big)^k \\ &= p^\beta \big(1-(1-p)t\big)^{-\beta} = \left(\frac{1-(1-p)t}{p}\right)^{-\beta}.\end{aligned}$$

$\square$

3.2.2 Formeln für die Gesamtschadenverteilung

Wir betrachten ein Standardmodell der kollektiven Risikotheorie. Die Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ sind also unabhängig und identisch verteilt, und N ist unabhängig von der Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Wir bezeichnen mit F die Verteilungsfunktion von X_1. Der Gesamtschaden ist gegeben durch

$$S_{\text{koll}} = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Wir bezeichnen mit G die Verteilungsfunktion von S_{koll}.

Lemma 3.2.14. *Es gilt*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)\mathbb{P}(N = n) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Nach Satz 3.2.4(a) gilt

$$\begin{aligned} G(x) = \mathbb{P}(S_{\text{koll}} \leq x) = \mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{N} X_i \leq x\Bigg) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x, N = n\Bigg) \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\Bigg(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\Bigg)\mathbb{P}(N = n) &= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)\mathbb{P}(N = n). \end{aligned}$$

□

Korollar 3.2.15. *Falls $X_1 \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, dann gilt*

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_{n\alpha,\beta}(x)\mathbb{P}(N = n) \quad \textit{für alle } x \in \mathbb{R},$$

wobei $\Gamma_{0,\beta} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$ und $\Gamma_{n\alpha,\beta}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Verteilungsfunktion von $\Gamma(n\alpha, \beta)$ bezeichnet.

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.14 und Satz 3.2.12. □

Satz 3.2.16. *Es gilt*

$$\psi_{S_{\text{koll}}}(t) = \phi_N(\psi_{X_1}(t)) \quad \textit{für alle } t \in \mathscr{M}_{\text{koll}},$$

wobei

$$\mathscr{M}_{\text{koll}} := \{t \in \mathbb{R} : t \in \mathscr{M}_{X_1} \textit{ und } \psi_{X_1}(t) \in \mathscr{M}_N^p\}.$$

Beweis. Wir setzen $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz 3.2.10(a) folgt

$$\begin{aligned}\phi_N(\psi_{X_1}(t)) &= \mathbb{E}\big[\psi_{X_1}(t)^N\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{S_n}(t)\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{tS_n}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[e^{tS_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tS_N}] = \mathbb{E}[e^{tS_{\text{koll}}}] = \psi_{S_{\text{koll}}}(t).\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.17. *Es gilt*

$$\phi_{S_{\text{koll}}}(t) = \phi_N(\phi_{X_1}(t)) \quad \textit{für alle } t \in \mathscr{M}^p_{\text{koll}},$$

wobei

$$\mathscr{M}^p_{\text{koll}} := \{t \in \mathbb{R} : t \in \mathscr{M}^p_{X_1} \textit{ und } \phi_{X_1}(t) \in \mathscr{M}^p_N\}.$$

Beweis. Wir setzen $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Mit Satz 3.2.10(b) folgt

$$\begin{aligned}\phi_N(\phi_{X_1}(t)) &= \mathbb{E}\big[\phi_{X_1}(t)^N\big] = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{X_1}(t)^n \mathbb{P}(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_{S_n}(t)\mathbb{P}(N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[t^{S_n}]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}] \\ &= \mathbb{E}[t^{S_N}] = \mathbb{E}[t^{S_{\text{koll}}}] = \phi_{S_{\text{koll}}}(t).\end{aligned}$$

□

Das folgende Resultat zeigt, warum wir ψ_X die momentenerzeugende Funktion von X nennen.

Satz 3.2.18. *Es sei X eine Zufallsvariable, so dass die momentenerzeugende Funktion ψ_X auf einer Umgebung der 0 existiert.*

(a) ψ_X ist in 0 beliebig oft differenzierbar, und es gilt

$$\psi_X^{(n)}(0) = \mathbb{E}[X^n] \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Es gilt $\mathbb{E}[X] = \psi'_X(0)$.

(c) Es gilt $\operatorname{Var}[X] = \psi''_X(0) - (\psi'_X(0))^2$.

Beweis.

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\psi_X^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dt^n}\mathbb{E}[e^{tX}]\bigg|_{t=0} = \mathbb{E}\left[\frac{d^n}{dt^n}e^{tX}\right]\bigg|_{t=0} = \mathbb{E}[X^n e^{tX}]|_{t=0} = \mathbb{E}[X^n],$$

wobei die Vertauschung von Differentiation und Integration aus dem Konvergenzsatz von Lebesgue folgt.

(b) Folgt aus Teil (a).

(c) Folgt aus Teil (a) und der Formel $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

□

Lemma 3.2.19. *Es sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[N] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k).$$

Beweis. Wegen der unbedingten Konvergenz der Reihe gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[N] &= \sum_{j=1}^{\infty} j\mathbb{P}(N = j) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} \mathbb{P}(N = j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \mathbb{P}(N = j) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k).\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.20 (Erste Waldsche Gleichung)**.** *Es seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen und $N \in \mathscr{L}^1$ eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass $\{N = n\}$ und $(X_k)_{k\geq n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ unabhängig sind, und setzen*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt $S_N \in \mathscr{L}^1$ und

$$\mathbb{E}[S_N] = \mu\mathbb{E}[N],$$

wobei $\mu = \mathbb{E}[X_1]$.

Beweis. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind die Zufallsvariable X_k und das Ereignis $\{N \geq k\}$ unabhängig. Dazu zeigen wir, dass X_k und $\{N < k\}$ unabhängig sind. In der Tat, für jede Borelmenge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_k \in B, N < k) &= \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_k \in B, N = n) = \sum_{n=0}^{k-1} \mathbb{P}(X_k \in B)\mathbb{P}(N = n)\\ &= \mathbb{P}(X_k \in B)\mathbb{P}(N < k).\end{aligned}$$

Nun zeigen wir, dass $S_N \in \mathscr{L}^1$. In der Tat, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 3.2.19 gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|S_N|] &= \mathbb{E}\left[\left|\sum_{k=1}^{N} X_k\right|\right] \leq \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} |X_k|\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} |X_k| \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k| \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_k|]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \geq k\}}] = \mathbb{E}[|X_1|] \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{E}[|X_1|]\mathbb{E}[N] < \infty.\end{aligned}$$

Nun folgt mit dem Satz von Fubini und Lemma 3.2.19

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_N] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} X_k\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{\infty} X_k \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}]\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \geq k\}}] = \mathbb{E}[X_1] \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N].\end{aligned}$$

□

Lemma 3.2.21. *Es sei $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Filtration. Weiterhin seien $(Y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess (das heißt Y_k ist $\mathscr{F}_k$-messbar für jedes $k \in \mathbb{N}$) und $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ein $\mathbb{F}$-previsibler Prozess (das heißt Z_k ist $\mathscr{F}_{k-1}$-messbar für jedes $k \in \mathbb{N}$), so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:*

- *$Y_k \in \mathscr{L}^2$ mit $\mathbb{E}[Y_k] = 0$, und Y_k und $\mathscr{F}_{k-1}$ sind unabhängig.*
- *Z_k ist beschränkt.*

Wir definieren den Prozess $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ durch

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} Y_k Z_k.$$

Dann ist M ein quadratintegrierbares $\mathbb{F}$-Martingal mit $M_0 = 0$ und

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(Y_k Z_k)^2] \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist M ein $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess mit $M_n \in \mathscr{L}^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbb{E}[M_n - M_{n-1} \mid \mathscr{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[Y_n Z_n \mid \mathscr{F}_{n-1}] = Z_n \cdot \mathbb{E}[Y_n] = 0.$$

Folglich ist M ein quadratintegrierbares $\mathbb{F}$-Martingal mit $M_0 = 0$. Außerdem gilt nach der diskreten Version von Lemma 2.2.6 für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[M_k^2 - M_{k-1}^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(Y_k Z_k)^2].$$

□

Satz 3.2.22 (Zweite Waldsche Gleichung)**.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.2.20 gelte* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^2$*. Dann gilt* $S_N - N\mu \in \mathscr{L}^2$ *und*

$$\mathbb{E}[(S_N - N\mu)^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[N],$$

wobei $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ *und* $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1]$.

Beweis. Wir definieren die Filtration $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$\mathscr{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n, \mathbb{1}_{\{N=0\}}, \ldots, \mathbb{1}_{\{N=n\}}).$$

Weiterhin definieren wir den Prozess $M = (M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch

$$M_n := \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu) \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}.$$

Dann ist M ein quadratintegrierbares $\mathbb{F}$-Martingal. In der Tat, wir setzen

$$Y_k := X_k - \mu \quad \text{und} \quad Z_k := \mathbb{1}_{\{N\geq k\}} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$M_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k Z_k \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$:

(1) Y_k ist $\mathscr{F}_k$-messbar. Also ist $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein $\mathbb{F}$-adaptierter Prozess. Weiterhin gilt $Y_k \in \mathscr{L}^2$ mit $\mathbb{E}[Y_k] = 0$. Außerdem sind Y_k und $\mathscr{F}_{k-1}$ unabhängig, da nach Voraussetzung X_k und $\{N = n\}$ für jedes $n \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ unabhängig sind.

(2) Z_k ist beschränkt. Außderdem gilt

$$\{N < k\} = \bigcup_{j=0}^{k-1} \{N = j\} \in \mathscr{F}_{k-1},$$

und daher $\{N \geq k\} \in \mathscr{F}_{k-1}$. Folglich ist $(Z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ein $\mathbb{F}$-previsibler Prozess.

Also ist M nach Lemma 3.2.21 ein quadratintegrierbares Martingal, und es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(Y_k Z_k)^2] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - \mu)^2 \mathbb{1}_{\{N \geq k\}}].$$

Im Beweis von Satz 3.2.20 hatten wir gezeigt, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable X_k und das Ereignis $\{N \geq k\}$ unabhängig sind. Also folgt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[M_n^2] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(X_k - \mu)^2]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N \geq k\}}] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}[X_k]\mathbb{P}(N \geq k) = \sigma^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(N \geq k).\end{aligned}$$

Mit Lemma 3.2.19 folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[N].$$

Also gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[M_n^2] < \infty,$$

und folglich ist das Martingal M gleichmäßig integrierbar. Nach dem Konvergenzsatz für gleichmäßig integrierbare Martingale existiert ein Limes $M_\infty \in \mathscr{L}^2$, so dass $M_n \overset{f.s.}{\to} M_\infty$ und $M_n \overset{\mathscr{L}^2}{\to} M_\infty$. Also gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$M_\infty = \lim_{n\to\infty} M_n = \sum_{k=1}^{\infty} (X_k - \mu)\mathbb{1}_{\{N \geq k\}} = \sum_{k=1}^{N} X_k - N\mu = S_N - N\mu,$$

und somit $S_N - N\mu \in \mathscr{L}^2$. Wegen $M_n \overset{\mathscr{L}^2}{\to} M_\infty$ folgt

$$\mathbb{E}[(S_N - N\mu)^2] = \mathbb{E}[M_\infty^2] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^2] = \sigma^2 \mathbb{E}[N].$$

□

Satz 3.2.23 (Variante der zweiten Waldschen Gleichung)**.** *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 3.2.22 gelte $N \in \mathscr{L}^2$, und die Zufallsvariablen N, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ seien unabhängig. Dann gilt $S_N \in \mathscr{L}^2$ und*

$$\mathrm{Var}[S_N] = \sigma^2 \mathbb{E}[N] + \mu^2 \mathrm{Var}[N],$$

wobei $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ und $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1]$.

Beweis. Nach Satz 3.2.22 gilt $S_N - N\mu \in \mathscr{L}^2$, und daher

$$S_N = (S_N - N\mu) + N\mu \in \mathscr{L}^2.$$

Nach den Sätzen 3.2.20 und 3.2.22 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S_N] &= \mathbb{E}[S_N^2] - \mathbb{E}[S_N]^2 = \mathbb{E}[(S_N - N\mu + N\mu)^2] - \mathbb{E}[S_N]^2 \\
&= \mathbb{E}[(S_N - N\mu)^2] + 2\mathbb{E}[(S_N - N\mu)N\mu] + \mathbb{E}[(N\mu)^2] - \mathbb{E}[S_N]^2 \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}[N] + 2\mu\mathbb{E}[(S_N - N\mu)N] + \mu^2\mathbb{E}[N^2] - \mu^2\mathbb{E}[N]^2 \\
&= \sigma^2 \mathbb{E}[N] - \mu^2\mathbb{E}[N^2] - \mu^2\mathbb{E}[N]^2 + 2\mu\mathbb{E}[NS_N].
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und N sind $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und N ebenfalls unabhängig. Also folgt

$$\mathbb{E}[NS_N] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[nS_n \mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{E}[S_n]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] = \mu \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \mathbb{P}(N=n) = \mu\mathbb{E}[N^2].$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[S_n] &= \sigma^2\mathbb{E}[N] - \mu^2\mathbb{E}[N^2] - \mu^2\mathbb{E}[N]^2 + 2\mu^2\mathbb{E}[N^2] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2(\mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2) = \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}[N].
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.2.24. *Bei der ersten Waldschen Gleichung (Satz 3.2.20) hatten wir unter anderem vorausgesetzt:*

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ sind $\{N = n\}$ und $(X_k)_{k\geq n+1}$ unabhängig.

Im Beweis von Satz 3.2.20 hatten wir gesehen, dass dies folgende Eigenschaft impliziert:

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sind X_k und $\{N \geq k\}$ unabhängig.

Tatsächlich könnten wir bei der ersten Waldschen Gleichung (Satz 3.2.20) Bedingung (a) durch die schwächere Bedingung (b) ersetzen; bei der zweiten Waldschen Gleichung und dessen Variante (Sätze 3.2.22 und 3.2.23) jedoch nicht. Genauer gesagt benötigen wir Bedingung (a) beim Nachweis der Martingaleigenschaft im Beweis von Satz 3.2.22.

Bemerkung 3.2.25. *Bei der Variante der zweiten Waldschen Gleichung (Satz 3.2.23) hatten wir folgende zusätzliche Bedingung gestellt:*

(c) N und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind unabhängig.

Auf diese Bedingung kann nicht verzichtet werden. In der Tat, seien $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p$ und $\mathbb{P}(X_1 = -1) = 1 - p$ für ein $p \in (0,1)$. Wir definieren

$$N := \mathbb{1}_{\{X_1=-1\}} + 2\mathbb{1}_{\{X_1=1\}}.$$

Dann gilt Bedingung (a), jedoch nicht Bedingung (c). Weiterhin erhalten wir

$$\mu = \mathbb{E}[X_1] = 1 \cdot p - 1 \cdot (1-p) = 2p - 1$$

und

$$\mathbb{E}[N^2] = 1 \cdot (1-p) + 4 \cdot p = 3p + 1.$$

Also gilt

$$\mu\mathbb{E}[N^2] = (2p-1)(3p+1) = 6p^2 - p - 1.$$

Außerdem erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[NS_N] &= \mathbb{E}[NS_N\mathbb{1}_{\{N=1\}}] + \mathbb{E}[NS_N\mathbb{1}_{\{N=2\}}] \\
&= \mathbb{E}[S_1\mathbb{1}_{\{N=1\}}] + \mathbb{E}[2S_2\mathbb{1}_{\{N=2\}}] \\
&= \mathbb{E}[X_1\mathbb{1}_{\{X_1=-1\}}] + 2\mathbb{E}[(X_1+X_2)\mathbb{1}_{\{X_1=1\}}] \\
&= -\mathbb{P}(X_1=-1) + 2\mathbb{E}[(1+X_2)\mathbb{1}_{\{X_1=1\}}] \\
&= -(1-p) + 2\mathbb{E}[1+X_2]\mathbb{P}(X_1=1) \\
&= p - 1 + 2(1+\mu)p = p - 1 + 2 \cdot 2p \cdot p \\
&= 4p^2 + p - 1.
\end{aligned}$$

Also ist die Gleichung

$$\mathbb{E}[NS_N] = \mu\mathbb{E}[N^2]$$

aus dem Beweis von Satz 3.2.23 nicht für jede Wahl von $p \in (0,1)$ erfüllt.

Wir können die erforderlichen Voraussetzungen der Waldschen Gleichungen wie folgt zusammenfassen:

- Satz 3.2.20: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$, $N \in \mathscr{L}^1$ und (b).

- Satz 3.2.22: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^2$, $N \in \mathscr{L}^1$ und (a).
- Satz 3.2.23: $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^2$, $N \in \mathscr{L}^2$ und (c).

Lemma 3.2.26. *Es seien X eine Zufallsvariable und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine nichtnegative, messbare Funktion, so dass $h(X) \in \mathscr{L}^1$. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(h(X) \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[h(X)]}{c} \quad \text{für jedes } c > 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[h(X)] &= \mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{\{h(X)\geq c\}}] + \mathbb{E}[h(X)\mathbb{1}_{\{h(X)<c\}}] \\ &\geq \mathbb{E}[c\mathbb{1}_{\{h(X)\geq c\}}] = c\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{h(X)\geq c\}}] = c\mathbb{P}(h(X) \geq c),\end{aligned}$$

womit die behauptete Ungleichung bewiesen ist. □

Lemma 3.2.27 (Markov-Ungleichung)**.** *Es sei $X \in \mathscr{L}^1$ eine integrierbare Zufallsvariable. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{c} \quad \text{für jedes } c > 0.$$

Beweis. Folgt aus Lemma 3.2.26 mit der Funktion $h(x) = |x|$. □

Lemma 3.2.28 (Chebyshev-Ungleichungen)**.** *Es sei $X \in \mathscr{L}^2$ eine quadratintegrierbare Zufallsvariable.*

(a) Für jedes $c > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{c^2}.$$

(a) Für jedes $c > 0$ gilt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) \leq \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2}.$$

Beweis.

(a) Eine Anwendung von Lemma 3.2.26 mit $h(x) = x^2$ liefert

$$\mathbb{P}(|X| \geq c) = \mathbb{P}(X^2 \geq c^2) \leq \frac{\mathbb{E}[X^2]}{c^2}.$$

(b) Wir definieren die quadratintegrierbare Zufallsvariable $Y \in \mathscr{L}^2$ durch $Y := X - \mathbb{E}[X]$. Mit Teil (a) folgt

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq c) = \mathbb{P}(|Y| \geq c) \leq \frac{\mathbb{E}[Y^2]}{c^2} = \frac{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}{c^2} = \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2}.$$

□

Satz 3.2.29 (Ungleichung von Cantelli)**.** *Für jede Zufallsvariable $X \in \mathscr{L}^2$ gilt*

$$\mathbb{P}(X \geq E[X] + c) \leq \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2 + \operatorname{Var}[X]} \quad \textit{für alle } c > 0.$$

Beweis. Wir setzen $Y := X - \mathbb{E}[X]$. Dann gilt $\mathbb{E}[Y] = 0$ und $\operatorname{Var}[Y] = \operatorname{Var}[X]$. Aus der Chebyshev-Ungleichung (Lemma 3.2.28(a)) folgt für alle $x \in (-c, \infty)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + c) &= \mathbb{P}(Y \geq c) = \mathbb{P}(Y + x \geq x + c) \leq \mathbb{P}(|Y + x| \geq x + c) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[(Y + x)^2]}{(c + x)^2} = \frac{\mathbb{E}[Y^2] + x^2}{(c + x)^2} = \frac{\operatorname{Var}[Y] + x^2}{(c + x)^2} = \frac{\operatorname{Var}[X] + x^2}{(c + x)^2}.\end{aligned}$$

Mit $x := \frac{\operatorname{Var}[X]}{c}$ folgt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + c) &\leq \frac{\operatorname{Var}[X] + \left(\frac{\operatorname{Var}[X]}{c}\right)^2}{\left(c + \frac{\operatorname{Var}[X]}{c}\right)^2} = \frac{\operatorname{Var}[X] + \frac{\operatorname{Var}[X]^2}{c^2}}{c^2 + 2\operatorname{Var}[X] + \frac{\operatorname{Var}[X]^2}{c^2}} \\ &= \frac{1 + \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2}}{1 + \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2}} \cdot \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2 + \operatorname{Var}[X]} = \frac{\operatorname{Var}[X]}{c^2 + \operatorname{Var}[X]}.\end{aligned}$$

□

Beispiel 3.2.30. *Es sei $c > 0$ beliebig, und es sei X eine diskrete Zufallsvariable mit*

$$\mathbb{P}(X = c) = \frac{1}{1 + c^2} \quad \textit{und} \quad \mathbb{P}\left(X = -\frac{1}{c}\right) = \frac{c^2}{1 + c^2}.$$

Dann gilt $\mathbb{E}[X] = 0$, und daher

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + c) = \frac{1}{1 + c^2}.$$

Weiterhin gilt

$$\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] = \frac{c^2}{1 + c^2} + \frac{1}{1 + c^2} = 1.$$

Die Ungleichung von Cantelli (Satz 3.2.29) liefert also

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}[X] + c) \leq \frac{1}{1 + c^2}.$$

Folglich ist die Ungleichung von Cantelli scharf.

Korollar 3.2.31. *Unter den Annahmen von Satz 3.2.23 gilt für alle* $c > 0$

$$\mathbb{P}(S_N \geq \mu\mathbb{E}[N] + c) \leq \frac{\sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}[N]}{c^2 + \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}[N]},$$

wobei $\mu = \mathbb{E}[X_1]$ *und* $\sigma^2 = \mathrm{Var}[X_1]$.

Beweis. Nach der ersten Waldschen Gleichung (Satz 3.2.20), der Ungleichung von Cantelli (Satz 3.2.29) und der Variante der zweiten Waldschen Gleichung (Satz 3.2.23) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N \geq \mu\mathbb{E}[N] + c) = \mathbb{P}(S_N \geq \mathbb{E}[S_N] + c) &\leq \frac{\mathrm{Var}[S_N]}{c^2 + \mathrm{Var}[S_N]}\\ &= \frac{\sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}[N]}{c^2 + \sigma^2\mathbb{E}[N] + \mu^2\mathrm{Var}[N]}.\end{aligned}$$

□

Definition 3.2.32. *Die* <u>*logarithmische momentenerzeugende Funktion*</u> $\Lambda_X : \mathbb{R} \to (-\infty, \infty]$ *einer reellen Zufallsvariablen* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch*

$$\Lambda_X(s) := \ln \mathbb{E}[e^{sX}], \quad s \in \mathbb{R}.$$

Definition 3.2.33. *Die* <u>*Ratenfunktion*</u> $I_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ *einer reellen Zufallsvariablen* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch*

$$I_X(b) := \sup_{s\geq 0} \big(sb - \Lambda_X(s)\big), \quad b \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung 3.2.34. *Wir erhalten* $I_X(b) \geq 0$ *durch die Wahl* $s = 0$.

Bemerkung 3.2.35. *Wir nennen* I_X *auch die* <u>*Legendre-Transformierte*</u> *von* Λ_X.

Satz 3.2.36. *Es sei* X *eine reellwertige Zufallsvariable.*

(a) Falls $\mathbb{P} \circ X = \mathrm{Exp}(\lambda)$, *dann gilt*

$$I_X(b) = \lambda b - 1 - \ln(\lambda b) \quad \textit{für alle } b \geq \frac{1}{\lambda} = \mathbb{E}[X].$$

(b) Falls $\mathbb{P} \circ X = \mathrm{Ber}(p)$ *mit* $p \in (0,1)$, *dann gilt*

$$I_X(b) = b \ln\left(\frac{b}{p}\right) + (1-b)\ln\left(\frac{1-b}{1-p}\right) \quad \textit{für alle } b \in [p, 1].$$

(c) Falls $\mathbb{P} \circ X = \mathrm{Pois}(\lambda)$, *dann gilt*

$$I_X(b) = -b + \lambda + b \ln\left(\frac{b}{\lambda}\right) \quad \textit{für alle } b \geq \lambda = \mathbb{E}[X].$$

(d) Falls $\mathbb{P} \circ X = \mathrm{N}(0, \sigma^2)$, *dann gilt*

$$I_X(b) = \frac{b^2}{2\sigma^2} \quad \textit{für alle } b \geq 0.$$

Beweis. Übung. □

Nun sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen. Wir setzen

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Im Folgenden benutzen wir die abkürzende Notation $I = I_{X_1}$.

Satz 3.2.37. *Es sei* $n \in \mathbb{N}_0$ *beliebig. Dann gilt für jedes* $b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(S_n \geq bn) \leq \exp\big(-nI(b)\big).$$

Beweis. Mit der Markov-Ungleichung (Lemma 3.2.27) erhalten wir für jedes $s \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq bn) &\leq \mathbb{P}\big(\exp(sS_n) \geq \exp(sbn)\big) \leq \exp(-sbn)\mathbb{E}[\exp(sS_n)] \\
&= \exp(-sbn)\mathbb{E}\left[\exp\left(s\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] = \exp(-sbn)\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{sX_i}\right] \\
&= \exp(-sbn)\mathbb{E}[e^{sX_1}]^n = \exp\big(-n\big(sb - \ln \mathbb{E}[e^{sX_1}]\big)\big) \\
&= \exp\big(-n\big(sb - \Lambda_{X_1}(s)\big)\big).
\end{aligned}$$

Da $s \geq 0$ beliebig gewesen ist, erhalten wir die gewünschte Ungleichung

$$\mathbb{P}(S_n \geq bn) \leq \exp\big(-nI(b)\big).$$

□

Nun sei N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}_0$, die unabhängig von der Folge $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist.

Korollar 3.2.38. *Für jedes* $a \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\mathbb{P}(S_N \geq a) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-nI\Big(\frac{a}{n}\Big)\right)\mathbb{P}(N = n).$$

Beweis. Wegen der Unabhängigkeit von $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ und N sind $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und N ebenfalls unabhängig. Also folgt mit Satz 3.2.37

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_N \geq a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \geq a, N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_n \geq a) \cdot \mathbb{P}(N = n)\\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp\Big(- nI\Big(\frac{a}{n}\Big)\Big)\mathbb{P}(N = n).\end{aligned}$$

□

3.2.3 Verteilungen der Panjer-Klasse

Es sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Wir setzen $p_n := \mathbb{P}(N = n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Satz 3.2.39.

(a) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Bi}(m, \theta)$ *mit* $\theta \in (0, 1)$*, dann gilt*

$$p_0 = (1 - \theta)^m \quad \textit{und} \quad p_n = \left(\frac{m + 1}{n} - 1\right)\frac{\theta}{1 - \theta}p_{n-1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Pois}(\lambda)$*, dann gilt*

$$p_0 = e^{-\lambda} \quad \textit{und} \quad p_n = \frac{\lambda}{n}p_{n-1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Falls $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{NB}(\beta, \theta)$*, dann gilt*

$$p_0 = \theta^\beta \quad \textit{und} \quad p_n = \left(\frac{\beta - 1}{n} + 1\right)(1 - \theta)p_{n-1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beweis. Übung. □

Definition 3.2.40. *Die Panjer-Klasse besteht aus allen Verteilungen auf* $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ *mit stochastischem Vektor* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$*, so dass* $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a + b > 0$ *existieren, so dass*

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1} \quad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wir bezeichnen die zugehörige Verteilung mit $\mathrm{Pan}(a, b)$.

Bemerkung 3.2.41. *Es seien* $a, b \in \mathbb{R}$ *beliebig.*

(a) *Damit* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *ein stochastischer Vektor ist, muss notwendigerweise* $p_0 > 0$ *und* $a + b \geq 0$ *gelten.*

(b) *Falls* $\mathrm{Pan}(a, b)$ *existiert, so ist* p_0 *durch die Bedingung* $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$ *eindeutig bestimmt.*

(c) *Falls* $a + b = 0$*, was in Definition 3.2.40 ausgeschlossen ist, so liegt die Dirac-Verteilung* δ_0 *vor.*

Korollar 3.2.42.

(a) *Es gilt* $\mathrm{Bi}(m, \theta) = \mathrm{Pan}(a, b)$ *mit*

$$a = \frac{\theta}{\theta - 1} \quad \textit{und} \quad b = \frac{(m+1)\theta}{1-\theta}.$$

Insbesondere gilt $a \in (-\infty, 0)$ *und* $b = -(m + 1)a \in (0, \infty)$*, sowie*

$$a + b = m\frac{\theta}{1-\theta} > 0.$$

(b) *Es gilt* $\mathrm{Pois}(\lambda) = \mathrm{Pan}(a, b)$ *mit*

$$a = 0 \quad \textit{und} \quad b = \lambda.$$

Insbesondere gilt $a + b = \lambda > 0$.

(c) *Es gilt* $\mathrm{NB}(\beta, \theta) = \mathrm{Pan}(a, b)$ *mit*

$$a = 1 - \theta \quad \textit{und} \quad b = (\beta - 1)(1 - \theta)$$

Insbesondere gilt $a \in (0, 1)$ *und* $b = (\beta - 1)a \in \mathbb{R}$*, sowie*

$$a + b = \beta(1 - \theta) > 0.$$

Beweis. Folgt aus Satz 3.2.39. $\square$

Korollar 3.2.43. *Zu jedem* $b > 0$ *existiert die Panjer-Verteilung* $\mathrm{Pan}(0, b)$*. Sie ist gegeben durch* $\mathrm{Pois}(b)$.

Beweis. Folgt aus Korollar 3.2.42. $\square$

Korollar 3.2.44. *Für alle* $a \in (0, 1)$ *und* $b \in \mathbb{R}$ *mit* $a + b > 0$ *existiert die Panjer-Verteilung* $\mathrm{Pan}(a, b)$*. Sie ist gegeben durch* $\mathrm{NB}(\beta, \theta)$ *mit*

$$\theta = 1 - a \quad \textit{und} \quad \beta = \frac{a+b}{a}.$$

Beweis. Folgt aus Korollar 3.2.42. □

Lemma 3.2.45. *Es sei X eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable. Dann gilt*

$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{\phi_X^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Insbesondere gilt $\mathbb{P}(X = 0) = \phi_X(0)$.

Beweis. Folgt aus dem Beweis von Satz 3.2.9. □

Satz 3.2.46. *Es sei N eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit stochastischem Vektor $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Weiterhin seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a+b > 0$ gegeben. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) Es gilt

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right)p_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Es gilt

$$(1 - at)\phi_N'(t) = (a + b)\phi_N(t), \quad t \in [0, 1).$$

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 - at)\phi_N^{(n)}(t) = (na + b)\phi_N^{(n-1)}(t), \quad t \in [0, 1).$$

In diesem Fall gilt $a < 1$.

Beweis. (i) ⇒ (ii): Es gilt

$$\phi_N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n, \quad t \in [0, 1).$$

Wegen

$$n\left(a + \frac{b}{n}\right) = na + b = a(n - 1) + (a + b)$$

folgt

$$\begin{aligned}
\phi_N'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n t^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} t^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \big(a(n-1) + (a+b) \big) p_{n-1} t^{n-1} \\
&= at \sum_{n=2}^{\infty} p_{n-1}(n-1) t^{n-2} + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1} t^{n-1} \\
&= at \sum_{n=1}^{\infty} n p_n t^{n-1} + (a+b) \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \\
&= at\phi_N'(t) + (a+b)\phi_N(t).
\end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Beweis per Induktion. Der Induktionsanfang $n = 1$ ist klar. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ gelte

$$(1 - at)\phi_N^{(n)}(t) = (na + b)\phi_N^{(n-1)}(t).$$

Durch Differenzieren folgt

$$-a\phi_N^{(n)}(t) + (1 - at)\phi_N^{(n+1)}(t) = (na + b)\phi_N^{(n)}(t),$$

und daher

$$(1 - at)\phi_N^{(n+1)}(t) = \big((n+1)a + b \big)\phi_N^{(n)}(t).$$

(iii) $\Rightarrow$ (i): Mit Lemma 3.2.45 und Teil (iii) mit $t = 0$ erhalten wir für alle $n \in \mathbb{N}$

$$n! p_n = \phi_N^{(n)}(0) = (na + b)\phi_N^{(n-1)}(0) = (na + b)p_{n-1}(n-1)!$$

Also folgt

$$p_n = \frac{na + b}{n} p_{n-1} = \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zur Zusatzaussage: Es gelte (i). Dann gilt $p_1 > 0$; ansonsten würde die Dirac-Verteilung δ_0 vorliegen. Angenommen $a \geq 1$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n} \right) p_{n-1} = \frac{(n-1)a + (a+b)}{n} p_{n-1} \geq \frac{n-1}{n} a p_{n-1} \geq \frac{n-1}{n} p_{n-1},$$

und folglich

$$np_n \geq (n-1)p_{n-1}.$$

Rekursiv folgt $np_n \geq p_1$, und folglich

$$p_n \geq \frac{p_1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Wegen der harmonischen Reihe folgt $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \infty$, im Widerspruch dazu, dass $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein stochastischer Vektor ist. □

Satz 3.2.47. *Die Panjer-Klasse besteht genau aus den Verteilungen aus Satz 3.2.39. Mit anderen Worten, für eine $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable N sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathbb{P} \circ N$ gehört zur Panjer-Klasse.*

(ii) *$\mathbb{P} \circ N$ ist eine der Verteilungen aus Satz 3.2.39.*

Beweis. (i) ⇒ (ii): Siehe [Sch06, Satz 7.2.4]. Teilweise folgt diese Implikation aus den vorherigen Resultaten. Und zwar sei $\mathrm{Pan}(a,b)$ eine Verteilung der Panjer-Klasse mit $a,b \in \mathbb{R}$, so dass $a+b>0$. Nach Satz 3.2.46 folgt $a<1$, und wir unterscheiden drei Fälle:

- Falls $a \in (0,1)$, so ist $\mathrm{Pan}(a,b)$ nach Korollar 3.2.44 eine negative Binomialverteilung.
- Falls $a=0$, so ist $\mathrm{Pan}(a,b)$ nach Korollar 3.2.43 eine Poisson-Verteilung.
- Falls $a<0$, so ist $\mathrm{Pan}(a,b)$ eine Binomialverteilung. Dies folgt allerdings nicht direkt aus Korollar 3.2.42(a), und erfordert weitere Arbeit.

(ii) ⇒ (i): Folgt aus Korollar 3.2.42. □

Lemma 3.2.48. *Es sei $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Pan}(a,b)$ eine Verteilung der Panjer-Klasse.*

(a) *Es gilt*

$$\mathbb{E}[N] = \frac{a+b}{1-a} \quad \textit{und} \quad \mathrm{Var}[N] = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\mathbb{E}[N]}{\mathrm{Var}[N]} = 1-a.$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathrm{Var}[N] < \mathbb{E}[N]$.

(ii) $a < 0$.

(iii) $\mathbb{P} \circ N$ *ist eine Binomialverteilung.*

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathrm{Var}[N] = \mathbb{E}[N]$.

(ii) $a = 0$.

(iii) $\mathbb{P} \circ N$ *ist eine Poisson-Verteilung.*

(d) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathrm{Var}[N] > \mathbb{E}[N]$.

(ii) $a > 0$.

(iii) $\mathbb{P} \circ N$ *ist eine negative Binomialverteilung.*

Beweis. Nach Satz 3.2.47 gibt es folgende Möglichkeiten:

- $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Bi}(m, \theta)$. Mit Korollar 3.2.42 folgt

$$\mathbb{E}[N] = m\theta = \frac{m\frac{\theta}{1-\theta}}{\frac{1}{1-\theta}} = \frac{m\frac{\theta}{1-\theta}}{1 - \frac{\theta}{\theta-1}} = \frac{a+b}{1-a}$$

und

$$\mathrm{Var}[N] = m\theta(1-\theta) = \frac{m\frac{\theta}{1-\theta}}{(\frac{1}{1-\theta})^2} = \frac{m\frac{\theta}{1-\theta}}{(1 - \frac{\theta}{1-\theta})^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

- $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{Pois}(\lambda)$. Mit Korollar 3.2.42 folgt

$$\mathbb{E}[N] = \lambda = \frac{a+b}{1-a}$$

und

$$\mathrm{Var}[N] = \lambda = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

- $\mathbb{P} \circ N = \mathrm{NB}(\beta, \theta)$. Mit Korollar 3.2.42 folgt

$$\mathbb{E}[N] = \frac{\beta(1-\theta)}{\theta} = \frac{a+b}{1-a}$$

und

$$\mathrm{Var}[N] = \frac{\beta(1-\theta)}{\theta^2} = \frac{a+b}{(1-a)^2}.$$

$\square$

Betrachten wir nun ein Standardmodell der kollektiven Risikotheorie

$$S_{\text{koll}} = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

Satz 3.2.49. *Die Verteilung von N gehöre zur Panjer-Klasse. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$*

$$(1 - a\phi_{X_1}(t))\phi_{S_{\text{koll}}}^{(n)}(t) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(a + b\frac{k}{n}\right) \phi_{S_{\text{koll}}}^{(n-k)}(t)\phi_{X_1}^{(k)}(t), \quad t \in [0, 1).$$

Beweis. Wir führen der Beweis per Induktion. Für $n = 1$ gilt nach den Sätzen 3.2.17 und 3.2.46

$$\begin{aligned}
&(1 - a\phi_{X_1}(t))\phi'_{S_{\text{koll}}}(t) = (1 - a\phi_{X_1}(t))\frac{d}{dt}\phi_N(\phi_{X_1}(t)) \\
&= (1 - a\phi_{X_1}(t))\phi'_N(\phi_{X_1}(t))\phi'_{X_1}(t) = (a+b)\phi_N(\phi_{X_1}(t))\phi'_{X_1}(t) \\
&= (a+b)\phi_{S_{\text{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t).
\end{aligned}$$

Nun der Inuktionsschritt $n \to n+1$: Nach der Produktregel fürs Ableiten gilt generell

$$f(t)g'(t) = \frac{d}{dt}\big(f(t)g(t)\big) - f'(t)g(t),$$

und daher

$$
\begin{aligned}
&(1-a\phi_{X_1}(t))\phi^{(n+1)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t) = \frac{d}{dt}\Big((1-a\phi_{X_1}(t))\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\Big) + a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\frac{d}{dt}\Big(\phi^{(n-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t)\Big) + a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\Big(\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t) + \phi^{(n-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k+1)}_{X_1}(t)\Big) + a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t)\\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1}\binom{n}{k-1}\left(a+b\frac{k-1}{n}\right)\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t) + a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t)\\
&\quad + \sum_{k=2}^{n+1}\binom{n}{k-1}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t)\\
&\quad - \sum_{k=2}^{n+1}\binom{n}{k-1}\frac{b}{n}\phi^{(n+1-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(k)}_{X_1}(t) + a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t).
\end{aligned}
$$

Der erste Summand (für $k = 1$) der ersten Summe lautet

$$n\left(a+\frac{b}{n}\right)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t).$$

Zusammen mit dem Anteil $a\phi'_{X_1}(t)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\left(a+n\left(a+\frac{b}{n}\right)\right)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t) = \big(a(n+1)+b\big)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t)\\
&= (n+1)\left(a+b\frac{1}{n+1}\right)\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi'_{X_1}(t).
\end{aligned}
$$

Das ist der korrekte Anteil im Endergebnis für $k = 1$. Der letzte Summand (für $k = n+1$) der zweiten Summe lautet

$$\left(a+b\frac{n+1}{n}\right)\phi_{S_{\mathrm{koll}}}(t)\phi^{(n+1)}_{X_1}(t).$$

Der letzte Summand (für $k = n + 1$) der dritten Summe lautet

$$\frac{b}{n}\phi_{S_{\text{koll}}}(t)\phi_{X_1}^{(n+1)}(t).$$

Zusammen erhalten wir

$$(a + bn)\phi_{S_{\text{koll}}}(t)\phi_{X_1}^{(n+1)}(t).$$

Das ist der korrekte Anteil im Endergebnis für $k = n + 1$. Wir können uns jetzt also auf die Summierung $k = 2, \dots, n$ konzentrieren. Wegen

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

erhalten wir

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n+1}{k}\left(a + b\frac{k}{n}\right)\phi_{S_{\text{koll}}}^{(n+1-k)}(t)\phi_{X_1}^{(k)}(t)$$
$$- \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k-1}\frac{b}{n}\phi_{S_{\text{koll}}}^{(n+1-k)}(t)\phi_{X_1}^{(k)}(t).$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k-1}\frac{b}{n} &= \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}\right]\frac{b}{n} = \left[\binom{n+1}{k} - \binom{n+1}{k}\frac{n+1-k}{n+1}\right]\frac{b}{n} \\ &= \binom{n+1}{k}\left(\frac{n+1}{n+1} - \frac{n+1-k}{n+1}\right)\frac{b}{n} = \binom{n+1}{k}\frac{bk}{(n+1)n}.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$b\frac{k}{n} - \frac{bk}{(n+1)n} = \frac{(n+1)bk}{(n+1)n} - \frac{bk}{(n+1)n} = \frac{nbk}{(n+1)n} = b\frac{k}{n+1}.$$

Also erhalten wir insgesamt die gewünschte Formel

$$(1 - a\phi_{X_1}(t))\phi_{S_{\text{koll}}}^{(n+1)}(t) = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}\left(a + b\frac{k}{n+1}\right)\phi_{S_{\text{koll}}}^{(n+1-k)}(t)\phi_{X_1}^{(k)}(t).$$

$\square$

Satz 3.2.50 (Rekursion von Panjer, 1981)**.** *Die Verteilung von N gehöre zur Panjer-Klasse, und es gelte $X_1 \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}_0$*

$$f_n := \mathbb{P}(X_1 = n) \quad \textit{und} \quad g_n := \mathbb{P}(S_{\text{koll}} = n).$$

(a) Es gilt

$$g_0 = \begin{cases} (1-\theta+\theta f_0)^m & \textit{falls } \mathbb{P}\circ N = \mathrm{Bi}(m,\theta), \\ \exp(-\lambda(1-f_0)) & \textit{falls } \mathbb{P}\circ N = \mathrm{Pois}(\lambda), \\ \left(\frac{1-(1-\theta)f_0}{\theta}\right)^{-\beta} & \textit{falls } \mathbb{P}\circ N = \mathrm{NB}(\beta,\theta). \end{cases}$$

(b) Im Fall $f_0 = 0$ gilt $g_0 = p_0$.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$g_n = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{n}\left(a + b\frac{k}{n}\right)g_{n-k}f_k.$$

Beweis.

(a) Nach Lemma 3.2.45 und Satz 3.2.17 gilt

$$g_0 = \phi_{S_{\mathrm{koll}}}(0) = \phi_N(\phi_{X_1}(0)) = \phi_N(f_0).$$

Also folgt die Formel mit Satz 3.2.13.

(b) Folgt aus Teil (a) und Satz 3.2.39.

(c) Nach Lemma 3.2.45 und Satz 3.2.49 gilt

$$\begin{aligned} (1-af_0)g_n &= (1-a\phi_{X_1}(0))\frac{\phi^{(n)}_{S_{\mathrm{koll}}}(0)}{n!} \\ &= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\phi^{(n-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(0)\phi^{(k)}_{X_1}(0) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(a+b\frac{k}{n}\right)\frac{\phi^{(n-k)}_{S_{\mathrm{koll}}}(0)}{(n-k)!}\frac{\phi^{(k)}_{X_1}(0)}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(a+b\frac{k}{n}\right)g_{n-k}f_k. \end{aligned}$$

□

Es sei $\mathrm{Pan}(a,b)$ eine Verteilung aus der Panjer-Klasse. Dann gilt für den stochastischen Vektor $(p_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, dass

$$p_k = \left(a + \frac{b}{k}\right)p_{k-1} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Also gilt

$$k\frac{p_k}{p_{k-1}} = ak + b \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Nun gehen wir davon aus, dass eine Stichprobe $(n_0, n_1, \ldots, n_d)$ mit $n_k \in \mathbb{N}$ für alle $k = 0, \ldots, d$ vorliegt. Hierbei ist n_k die Anzahl der Perioden, in denen k Schäden gemeldet worden sind. Wir definieren die Anzahl der beobachteten Perioden $n := \sum_{k=1}^{d} n_k$, und den stochastischen Vektor $p : \{0, \ldots, d\} \to [0, 1]$ durch

$$p_k := \frac{n_k}{n}, \quad k = 0, \ldots, d.$$

Nun definieren wir $X = (X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ durch

$$X_k := k\frac{p_k}{p_{k-1}}, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Wir definieren die Kontrollvariablen $y := (1, \ldots, d) \in \mathbb{R}^d$ und vermuten einen linearen Zusammenhang

$$X_k = b + ay_k, \quad k = 1, \ldots, d.$$

Der Kleinste-Quadrate-Schätzer $(\hat{a}, \hat{b})$ für (a, b) ist gegeben durch

$$\hat{a} = \frac{s_{yX}}{s_y^2} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \bar{X} - \hat{a}\bar{y}.$$

Kapitel 4

Dynamische Modelle

4.1 Poisson-Prozesse

Es sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ eine stochastische Basis; das heißt $\mathbb{F} = (\mathscr{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ ist eine rechtsstetige Filtration.

Definition 4.1.1. *Es sei X ein adaptierter càdlàg-Prozess.*

(a) X heißt ein Prozess mit unabhängigen Zuwächsen (PUZ) (bezüglich $\mathbb{F}$), falls $X_0 = 0$ und für alle $0 \leq s \leq t$ die Zufallsvariable $X_t - X_s$ und die σ-Algebra $\mathscr{F}_s$ unabhängig sind.

(b) X heißt ein Prozess mit unabhängigen und stationären Zuwächsen (PUSZ) (bezüglich $\mathbb{F}$), falls X ein PUZ ist, und für alle $0 \leq s \leq t$ gilt $X_t - X_s \overset{\mathrm{d}}{=} X_{t-s}$.

Bemerkung 4.1.2. *Ein PUSZ wird auch oft ein Lévy-Prozess genannt.*

Definition 4.1.3. *Ein adaptierter càdlàg-Prozess N heißt ein Punktprozess (oder auch Zählprozess), falls $N \in \mathbb{N}_0$ und $\Delta N \in \{0, 1\}$.*

Definition 4.1.4. *Ein Punktprozess N heißt ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, falls gilt:*

(a) $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$.

(b) $N_t - N_s$ und $\mathscr{F}_s$ sind für alle $0 \leq s \leq t$ unabhängig.

Bemerkung 4.1.5. *Ein Poisson-Prozess N mit Intensität λ ist ein PUZ.*

Satz 4.1.6 (Satz von Poisson-Watanabe)**.** *Es sei N ein Punktprozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) N ist ein Poisson-Prozess mit Intensität λ.

(ii) Es gilt $N_t^p = \lambda t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

In diesem Fall gilt für alle $0 \le s < t$

$$N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s)).$$

Korollar 4.1.7. *Ein Poisson-Prozess* N *mit Intensität* λ *ist ein PUSZ.*

Es sei N ein Punktprozess.

Definition 4.1.8.

(a) Wir definieren die Stoppzeiten $(T_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ *durch*

$$T_n := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t = n\}.$$

(b) Wir definieren die Zufallsvariablen $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *durch*

$$W_n := T_n - T_{n-1}.$$

Bemerkung 4.1.9. *Es gilt* $T_0 = 0$, $T_1 = W_1$, *und allgemeiner*

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bemerkung 4.1.10. *Es gelten die Darstellungen*

$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_i \le t\}}, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

und

$$N = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{1}_{[\![T_i,\infty[\![} = \sum_{i=1}^{\infty} i\mathbb{1}_{[\![W_i,W_{i+1}[\![}.$$

Definition 4.1.11. *Falls die Zufallsvariablen* $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *unabhängig und identisch verteilt sind, so nennen wir* N *einen* <u>*Erneuerungsprozess*</u> *zur Erneuerungsfolge* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Satz 4.1.12. *Es sei* N *ein Punktprozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) N *ist ein Poisson-Prozess mit Intensität* λ.

(ii) N *ist ein Erneuerungsprozess mit* $W_n \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Satz 4.1.13. *Es sei* N *ein Punktprozess. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *N ist ein Poisson-Prozess mit Intensität* λ.

(ii) *N ist ein PUSZ, und es gilt* $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ *für alle* $t \in \mathbb{R}_+$.

(iii) *N ist ein PUSZ, und es existieren Funktionen* $f, g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{h \downarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$$

so dass für alle $t \in \mathbb{R}_+$ *gilt*

$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda h + f(h), \quad h \in \mathbb{R}_+,$$
$$\mathbb{P}(N_{t+h} - N_t > 1) = g(h), \quad h \in \mathbb{R}_+.$$

Satz 4.1.14. *Es sei* N *ein Poisson-Prozess mit Intensität* λ. *Dann gilt* $\mathbb{P}$*-fast sicher*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Satz 4.1.15. *Es sei* N *ein Poisson-Prozess mit Intensität* λ. *Für alle* $t > 0$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\mathbb{P}^{\{N_t = n\}} \circ (T_1, \ldots, T_n) = \mathbb{P} \circ (U_{(1)}, \ldots, U_{(n)}),$$

wobei $U_1, \ldots, U_n \sim \mathrm{UC}(0, t)$ *unabhängige, gleichverteilte Zufallsvariablen sind, und* $U_{(1)} \leq \ldots \leq U_{(n)}$ *die Ordnungsstatistiken sind. Diese Verteilung auf* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ *hat also die Dichte*

$$f = \frac{n!}{t^n} \mathbb{1}_{\Delta},$$

wobei $\Delta \subset \mathbb{R}^n$ *gegeben ist durch*

$$\Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n \leq t\}.$$

4.2 Das Cramér-Lundberg-Modell

Es sei N ein Poisson-Prozess mit Intensität λ. Nach Satz 4.1.12 gilt

$$\mathbb{E}[W_1] = \frac{1}{\lambda}.$$

Weiterhin sei $(X_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathscr{L}^1$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Wir nehmen an, dass $F(0) = 0$ (die X_i sind also positiv) und dass $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ und N unabhängig sind. Wir setzen

$$\mu := \mathbb{E}[X_1] \in (0, \infty).$$

Definition 4.2.1. *Wir nennen den Prozess*

$$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i.$$

den Gesamtschadenprozess.

Bemerkung 4.2.2. *Der Gesamtschadenprozess S ist ein sogenannter zusammengesetzter Poisson-Prozess.*

Definition 4.2.3. *Wir nennen das vorliegende Modell für den Gesamtschaden das Cramér-Lundberg-Modell.*

Bemerkung 4.2.4. *Ist N allgemeiner ein Erneuerungsprozess, so sprechen wir vom Sparre-Andersen-Modell.*

Definition 4.2.5. *Jede deterministische, monoton wachsende Funktion $P : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mit $P_0 = 0$ nennen wir einen Prämienprozess.*

Im Folgenden fixieren wir den Prämienprozess

$$P_t = ct, \quad t \in \mathbb{R}_+$$

für ein $c > 0$.

Definition 4.2.6. *Wir nennen c die Prämienrate.*

Definition 4.2.7. *Für jedes $u \in \mathbb{R}_+$ nennen wir den Prozess*

$$R = R(u) := u + P - S_N$$

einen Risikoprozess mit Anfangsrisikoreserve (oder Startkapital) u.

Definition 4.2.8.

(a) Wir nennen

$$\tau : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to [0, \infty], \quad \tau(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : R_t(u) < 0\}$$

die Ruinzeiten.

(b) Wir nennen

$$\Psi : \mathbb{R}_+ \to [0, 1], \quad \Psi(u) := \mathbb{P}(\tau(u) < \infty)$$

die Ruinwahrscheinlichkeiten.

(c) *Wir nennen*

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0,1], \quad \Phi(u) := 1 - \Psi(u)$$

die Überlebenswahrscheinlichkeiten.

Lemma 4.2.9. *Die Funktion Φ ist monoton wachsend. Folglich ist Ψ monoton fallend.*

Beweis. Für alle $u \leq v$ gilt

$$\begin{aligned}\Phi(u) &= \mathbb{P}(\tau(u) = \infty) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{R_t(u) \geq 0\} \Bigg) \\ &\leq \mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{t \in \mathbb{Q}_+} \{R_t(v) \geq 0\} \Bigg) = \mathbb{P}(\tau(v) = \infty) = \Phi(v).\end{aligned}$$

□

Satz 4.2.10. *Es gilt $\mathbb{P}$-fast sicher*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R_t}{t} = c - \lambda\mu.$$

Beweis. Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{N_t} \sum_{i=1}^{N_t} X_i = \mathbb{E}[X_1] = \mu.$$

Nach Satz 4.1.14 gilt außerdem $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{N_t}{t} = \lambda.$$

Es folgt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{t} = \lim_{t \to \infty} \frac{S_{N_t}}{N_t} \frac{N_t}{t} = \lambda\mu.$$

Also folgt insgesamt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t \to \infty} \frac{R_t}{t} = \lim_{t \to \infty} \left(\frac{u + ct}{t} - \frac{S_{N_t}}{t} \right) = c - \lambda\mu.$$

□

Satz 4.2.11. *Falls $c \leq \lambda\mu$, dann gilt $\Psi(u) = 1$ für alle $u \in \mathbb{R}_+$.*

Beweis. Wir betrachten nur den Fall $c < \lambda\mu$. Nach Satz 4.2.10 gilt $\mathbb{P}$-fast sicher

$$\lim_{t\to\infty} \frac{R_t}{t} = c - \lambda\mu < 0,$$

und daher gilt für alle $u \in \mathbb{R}_+$

$$\Psi(u) = \mathbb{P}(\tau(u) < \infty) = \mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{t\in\mathbb{Q}_+} \{R_t(u) < 0\} \Bigg) = 1.$$

□

Definition 4.2.12. *Die Zahl*

$$\rho := \frac{c}{\lambda\mu} - 1$$

heißt relativer Sicherheitszuschlag (englisch safety loading).

Definition 4.2.13. *Falls $\rho > 0$, was gleichbedeutend mit $c > \lambda\mu$ ist, so sagen wir, dass die Nettogewinnbedingung (englisch net profit condition) erfüllt ist.*

Bemerkung 4.2.14. *Im Folgenden werden wir stets annehmen, dass die Nettogewinnbedingung erfüllt ist.*

Definition 4.2.15. *Wir setzen*

$$\sigma := \frac{1}{1+\rho}.$$

Bemerkung 4.2.16. *Wegen $\rho > 0$ gilt $\sigma \in (0,1)$.*

Bemerkung 4.2.17. *Es gilt*

$$\sigma = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Lemma 4.2.18. *Es gilt*

$$\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c} = \frac{1-\sigma}{\mu}.$$

Beweis. Nach Bemerkung 4.2.17 gilt

$$\frac{1-\sigma}{\mu} = \frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right) = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}.$$

□

Lemma 4.2.19. *Die Funktion Φ ist monoton wachsend mit $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$. Folglich ist Ψ monoton fallend mit $\lim_{u\to\infty} \Psi(u) = 0$.*

Beweis. Die Monotonie hatten wir bereits in Lemma 4.2.9 gesehen. Für den Beweis der Aussage über die Grenzwerte ist die Nettogewinnbedingung essentiell. □

4.3 Berechnung der Ruinwahrscheinlichkeiten

Wir setzen $X := X_1$ und $\bar{F}(x) := 1 - F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 4.3.1. *Es sei $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ stetig differenzierbar mit $\varphi(0) = 0$. Dann gilt*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx.$$

Beweis. Mit Hilfe des Satzes von Fubini erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(X)] &= \mathbb{E}\bigg[\int_0^X \varphi'(x)dx\bigg] = \mathbb{E}\bigg[\int_0^\infty \varphi'(x)\mathbb{1}_{\{X>x\}}dx\bigg] \\ &= \int_0^\infty \varphi'(x)\mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^\infty \varphi'(x)\bar{F}(x)dx.\end{aligned}$$

□

Korollar 4.3.2.

(a) Für jedes $p \in (0, \infty)$ gilt

$$\mathbb{E}[X^p] = \int_0^\infty px^{p-1}\bar{F}(x)dx.$$

(b) Insbesondere gilt

$$\mu = \int_0^\infty \bar{F}(x)dx.$$

Beweis.

(a) Folgt aus Lemma 4.3.1 mit $\varphi(x) = x^p$.

(b) Folgt mit $p = 1$.

□

Satz 4.3.3. *Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ erfüllt die Integralgleichung*

$$\Phi(u) = \Phi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_{(0,u]} \Phi(u - x)\bar{F}(x)dx, \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Korollar 4.3.4. *Es gilt $\Phi(0) = 1 - \sigma$, und folglich $\Psi(0) = \sigma$.*

Beweis. Wegen $\lim_{u\to\infty}\Phi(u)=1$ gilt

$$1=\Phi(0)+\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(x)dx=\Phi(0)+\frac{\lambda\mu}{c}=\Phi(0)+\sigma,$$

und daher

$$\Phi(0)=1-\sigma.$$

□

Satz 4.3.5. *Die Funktion $\Phi:\mathbb{R}_+\to[0,1]$ ist absolutstetig, und erfüllt die Differentialgleichung*

$$\Phi'(u)=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_{(0,u]}\Phi(u-x)F(dx),\quad u\in\mathbb{R}_+.$$

Beispiel 4.3.6. *Falls $X\sim\operatorname{Exp}(1/\mu)$, dann gilt*

$$\Psi(u)=\sigma\exp\left(-\frac{1-\sigma}{\mu}u\right),\quad u\in\mathbb{R}_+.$$

Beweis. Die Zufallsvariable X ist absolutstetig mit Dichte

$$f(x)=\frac{1}{\mu}\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right).$$

Mit Satz 4.3.5 folgt

$$\begin{aligned}\Phi'(u)&=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c}\int_{(0,u]}\Phi(u-x)F(dx)\\&=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u\Phi(u-x)\exp\left(-\frac{x}{\mu}\right)dx\\&=\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\int_0^u\Phi(x)\exp\left(-\frac{u-x}{\mu}\right)dx.\end{aligned}$$

Ableiten nach der Kettenregel und Umstellen der vorherigen Gleichung ergibt

$$\begin{aligned}\Phi''(u)&=\frac{\lambda}{c}\Phi'(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\left(\Phi(u)-\frac{1}{\mu}\int_0^u\Phi(x)\exp\left(-\frac{u-x}{\mu}\right)dx\right)\\&=\frac{\lambda}{c}\Phi'(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u)+\frac{\lambda}{c\mu^2}\int_0^u\Phi(x)\exp\left(-\frac{u-x}{\mu}\right)dx\\&=\frac{\lambda}{c}\Phi'(u)-\frac{\lambda}{c\mu}\Phi(u)+\frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\Phi(u)-\Phi'(u)\right)\\&=\left(\frac{\lambda}{c}-\frac{1}{\mu}\right)\Phi'(u)=-\frac{1-\sigma}{\mu}\Phi'(u).\end{aligned}$$

Also folgt

$$\Phi(u) = c_1 - c_2 \exp\Big(-\frac{1-\sigma}{\mu} u \Big).$$

Wegen $\Phi(0) = 1 - \sigma$ und $\lim_{u\to\infty} \Phi(u) = 1$ folgt $c_1 = 1$ und $c_2 = \sigma$. Also gilt

$$\Psi(u) = 1 - \Phi(u) = \sigma \exp\Big(-\frac{1-\sigma}{\mu} u \Big).$$

□

4.4 Die Lundberg-Ungleichung

Wir setzen $X := X_1$ und $W := W_1$.

Definition 4.4.1. *Eine Konstante $r > 0$ heißt Lundberg-Koeffizient (oder Anpassungskoeffizient), falls*

$$\mathbb{E}[\exp(r(X - cW))] = 1.$$

Satz 4.4.2 (Lundberg-Ungleichung)**.** *Falls ein Lundberg-Koeffizient $r > 0$ existiert, dann gilt*

$$\Psi(u) \leq e^{-ru} \quad \textit{für alle } u \in \mathbb{R}_+.$$

Beispiel 4.4.3. *Falls $X \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$, dann gilt*

$$\Psi(u) \leq \exp\Big(-\frac{1-\sigma}{\mu} u \Big), \quad u \in \mathbb{R}_+.$$

Beweis. Es gilt $W \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Wegen der Unabhängigkeit von X und W hat der Zufallsvektor (X, W) die Dichte

$$f(x,w) = \frac{\lambda}{\mu} \exp\Big(-\frac{x}{\mu} - \lambda w \Big) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,w).$$

Es sei $r \in [0, \frac{1}{\mu})$ beliebig. Dann gilt $\frac{1}{\mu} - r > 0$, und daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(r(X - cW))] &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp(r(x - cw)) f(x,w) dx dw \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\Big(-\Big(\frac{1}{\mu} - r\Big) x \Big) \exp\big(-(rc + \lambda) w \big) dx dw \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\mu} - r} \cdot \frac{1}{\lambda + rc} = \Big((1 - r\mu) \Big(1 + \frac{rc}{\lambda} \Big) \Big)^{-1}.
\end{aligned}$$

Also ist der Lundberg-Koeffizient gegeben durch

$$\begin{aligned}
&(1-r\mu)\left(1+\frac{rc}{\lambda}\right)=1\\
\Leftrightarrow\ &1+\frac{rc}{\lambda}-r\mu-\frac{c\mu}{\lambda}r^2=1\\
\Leftrightarrow\ &\left(\frac{c}{\lambda}-\mu\right)r-\frac{c\mu}{\lambda}r^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\frac{c\mu}{\lambda}r=\frac{c}{\lambda}-\mu\\
\Leftrightarrow\ &r=\frac{1}{\mu}-\frac{\lambda}{c}=\frac{1-\sigma}{\mu}.
\end{aligned}$$

Wegen der Nettogewinnbedingung gilt $\sigma\in(0,1)$, und folglich $r>0$. Mit der Lundberg-Ungleichung (Satz 4.4.2) folgt

$$\Psi(u)\le\exp\left(-\frac{1-\sigma}{\mu}u\right),\quad u\in\mathbb{R}_+.$$

□

4.5 Die Lundberg-Approximation

Satz 4.5.1 (Lundberg-Approximation)**.** *Wir nehmen an, dass ein Lundberg-Koeffizient $r>0$ existiert.*

(a) Falls $r\in\mathscr{M}_X$, dann gilt

$$\Psi(u)\sim\gamma e^{-ru}\quad\textit{für } u\to\infty,$$

wobei

$$\gamma:=\frac{\rho\mu}{\psi_X'(r)-\frac{c}{\lambda}}\in(0,1].$$

(b) Falls $r\notin\mathscr{M}_X$, dann gilt

$$\lim_{u\to\infty}e^{ru}\Psi(u)=0.$$

Lemma 4.5.2. *Für $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ gilt $\mathscr{M}_X=(-\infty,\lambda)$ mit*

$$\psi_X(t)=\frac{\lambda}{\lambda-t},$$

und folglich

$$\psi_X'(t)=\frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}.$$

Beispiel 4.5.3. *Falls* $X \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$, *dann gilt*

$$\Psi(u) \sim \sigma \exp\left(- \frac{1-\sigma}{\mu} u \right) \quad \textit{für } u \to \infty.$$

Beweis. In Beispiel 4.4.3 hatten bereits den Lundberg-Koeffizienten

$$r = \frac{1-\sigma}{\mu}$$

berechnet. Nach Lemma 4.5.2 gilt $\mathscr{M}_X = (-\infty, \frac{1}{\mu})$ mit

$$\psi_X'(t) = \frac{\frac{1}{\mu}}{(\frac{1}{\mu} - t)^2}.$$

Also gilt $r \in \mathscr{M}_X$ und

$$\psi_X'(r) = \frac{\frac{1}{\mu}}{(\frac{\sigma}{\mu})^2} = \frac{\mu}{\sigma^2}.$$

Wegen

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{\lambda\mu}{c}$$

folgt

$$\gamma = \frac{\rho\mu}{\psi_X'(r) - \frac{c}{\lambda}} = \frac{\rho\mu}{\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{c}{\lambda}} = \frac{\frac{c}{\lambda} - \mu}{\frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{c}{\lambda}} = \frac{\frac{c}{\lambda} - \mu}{\frac{c^2}{\lambda^2\mu} - \frac{c}{\lambda}} = \frac{\lambda\mu(c - \lambda\mu)}{c(c-\lambda\mu)} = \frac{\lambda\mu}{c} = \sigma.$$

Also folgt mit der Lundberg-Approximation (Satz 4.5.1(a))

$$\Psi(u) \sim \sigma \exp\left(- \frac{1-\sigma}{\mu} u \right) \quad \text{für } u \to \infty.$$

$\square$

Literaturverzeichnis

[AA10] Asmussen, S. ; Albrecher, H.: *Ruin Probabilities.* World Scientific, New Jersey, 2010

[BOS17] Blath, J. ; Ortgiese, M. ; Scheutzow, M.: *Versicherungsmathematik.* 2017. – Vorlesungsmanuskript aus dem WS 2016/17, Technische Universität Berlin und Universität Bath

[EKM97] Embrechts, P. ; Klüppelberg, C. ; Mikosch, T.: *Modelling Extremal Events.* Springer-Verlag, Berlin, 1997

[Ger86] Gerber, H. U.: *Lebensversicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 1986

[Ger95] Gerber, H. U.: *Life Insurance Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 1995

[GHM+16] Goelden, H.-W. ; Hess, K. T. ; Morlock, M. ; Schmidt, K. D. ; Schröter, K. J.: *Schadenversicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 2016

[Gra91] Grandell, J.: *Aspects of Risk Theory.* Springer-Verlag, New York, 1991

[Kel91] Kellsion, S. G.: *The Theory of Interest.* McGraw-Hill, Boston, 1991

[Klü04] Klüppelberg, C.: *Risikotheorie.* 2004. – Vorlesungsmanuskript aus dem SS 2004, Technische Universität München

[Kol10] Koller, M.: *Stochastische Modelle in der Lebensversicherung.* Springer-Verlag, Berlin, 2010

[MH99] Milbrodt, H. ; Helbig, M.: *Mathematische Methoden der Personenversicherung.* Walter de Gruyter, Berlin, 1999

[Mik10] Mikosch, T.: *Non-life Insurance Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2010

[Rie05] Riedle, M.: *Risikotheorie.* 2005. – Vorlesungsmanuskript, Humboldt-Universität zu Berlin

[RSST99] Rolski, T. ; Schmidli, V. ; Schmidt, V. ; Teugels, J.: *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* Wiley Series, Chichester, 1999

[Sch06] Schmidt, K. D.: *Versicherungsmathematik.* Springer-Verlag, Berlin, 2006