Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Ernst August v. Hammerstein

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Abteilung für Mathematische Stochastik

Wintersemester 2017/18

Literatur (Auswahl)

- **Bauer, H.:** Wahrscheinlichkeitstheorie, 5. Aufl., de Gruyter, 2002
- **Kallenberg, O.:** Foundations of Modern Probability, Springer, 2002
- **Klenke, A.:** Wahrscheinlichkeitstheorie, 3. Aufl., Springer Spektrum, 2013
- **Rüschendorf, L.:** Wahrscheinlichkeitstheorie, Springer Spektrum, 2016
- **Shiryaev, A.:** Probability-1, 3. Aufl., Springer, 2016

Zur Vertiefung der Maß- und Integrationstheorie empfiehlt sich auch

- **Elstrodt, J.:** Maß- und Integrationstheorie, 6. Aufl., Springer, 2009

1. Maß- und Integrationstheorie

1.1 Das Inhalts- und das Maßproblem

Ziel: Finde im Grundraum $\Omega = \mathbb{R}^k$ möglichst großes Mengensystem $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$, dessen Elemente A man ein (geometrisches) Volumen $\mu(A)$ zuordnen kann.

Für dieses $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ verlangt man die **σ-Additivität**, d.h.

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \qquad \text{für paarweise disjunkte } A_i \in \mathcal{A}. \tag{1.1}$$

sowie die **Translationsinvarianz**

$$\mu(A+a) = \mu(A) \quad \forall\, A \in \mathcal{A}, \forall\, a \in \mathbb{R}^k. \tag{1.2}$$

Beispiel 1.1: Für Intervalle der Form (a,b), $[a,b)$, $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ist die übliche Länge $\mu((a,b)) = \mu([a,b)) = \mu([a,b]) = b-a$ σ-additiv und translationsinvariant. Für dieses μ ist also die Menge der Intervalle im gesuchten System $\mathcal{A}$ enthalten.

Die Hoffnung, dass $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$ (d.h. jeder Teilmenge von $\mathbb{R}^k$ lässt sich ein Volumen mit den Eigenschaften (1.1) und (1.2) zuordnen), wird jedoch zerstört durch

Satz 1.2 (Existenz nicht-messbarer Mengen)

Es gibt kein translationsinvariantes, σ-additives Volumen (Maß) $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *mit* $\mu([0,1]) = 1$.

Beweis: O.B.d.A. sei $k = 1$. Definiere Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$$

und setze $\mathbb{R}/_\sim = \mathbb{R}/\mathbb{Q} = \{[x];\, x \in \mathbb{R}\}$ (Menge der Äquivalenzklassen).
Nach dem Auswahlaxiom der Mengenlehre existiert ein Repräsentantensystem $A \subset \mathbb{R}$ von $\mathbb{R}/_\sim$, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $|A \cap [x]| = 1$.
O.E. sei $A \subset [0,1]$ (ansonsten modifiziere Repräsentanten durch Verschiebung mit $q \in \mathbb{Q}$ geeignet). Dann gilt

$$[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q + A) \subset [-1,2],$$

denn wäre $a \in [0,1]$, aber $a \notin \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q + A)$, enthielte das Repräsentantensystem A kein Element der Äquivalenzklasse $[a]$, was seiner definierenden Eigenschaft widerspräche.

Annahme: Es existiere ein translationsinvariantes, σ-additives Maß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ mit $\mu([0,1]) = 1$.
Wäre $\mu(A) = 0$, dann folgte

$$1 = \mu([0,1]) \leq \mu\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} (q + A)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(q + A)$$
$$= \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \mu(A) = 0,$$

also ein Widerspruch. Wäre $\mu(A) > 0$, dann folgte

$$2 = \mu([0,1]) + \mu([1,2]) = \mu([0,1]) + \mu((1,2]) = \mu([0,2])$$
$$\geq \mu\left(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} (q + A)\right) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]} \mu(q + A) = \infty$$

was ebenfalls nicht sein kann. $\square$

Bemerkung 1.3: Das Auswahlaxiom ist äquivalent zur Aussage, dass nicht-messbare Mengen existieren. Gibt man das Auswahlaxiom auf (was die Mathematiker aus guten Gründen nicht tun!), kann man jede Teilmenge des $\mathbb{R}^k$ als messbar ansehen.

Definition 1.4 (Inhalt)

$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *heißt* **Inhalt**, *falls gilt:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) μ *ist* **endlich additiv**, *d.h.* $\mu(\bigcup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ *für alle paarweise disjunkten* $(A_i)_{1 \le i \le n} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)$

Sei G die Gruppe der Bewegungen (Isometrien) des $\mathbb{R}^k$, d.h. die von den orthogonalen Transformationen und Translationen erzeugte Gruppe.

Definition 1.5

1) $A, B \subset \mathbb{R}^k$ *heißen* **kongruent** *($A \sim B$) genau dann, wenn ein* $g \in G$ *existiert mit* $g(A) = B$.
2) $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *heißt* **bewegungsinvariant**, *falls*

$$\mu(g(A)) = \mu(A) \quad \forall\, g \in G,\ \forall\, A \subset \mathbb{R}^k.$$

Satz 1.6 (Inhaltsproblem)

Es existiert ein bewegungsinvarianter Inhalt

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \to \overline{\mathbb{R}}_+ \quad \textit{mit } \mu([0,1]) = 1$$

genau dann, wenn $k = 1, 2$.

Dass für $k \geq 3$ kein normierter, bewegungsinvarianter Inhalt existieren kann, verdeutlicht auf drastische Weise das sogenannte Banach-Tarski-Paradoxon:

Satz 1.7 (Banach-Tarski-Paradoxon)

Seien $k \geq 3$ *und* $A, B \in \mathbb{R}^k$ *beschränkte Teilmengen mit nicht-leeren Inneren* $\mathring{A} \neq \emptyset$, $\mathring{B} \neq \emptyset$. *Dann existieren ein* $m \in \mathbb{N}$ *und paarweise disjunkte Mengen* $A_i \subset \mathbb{R}^k$ *und paarweise disjunkte* $B_i \subset \mathbb{R}^k$, $1 \leq i \leq m$, *so dass*

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{m} B_i, \qquad \textit{und } A_i \sim B_i,\ 1 \leq i \leq m.$$

1.2 Mengensysteme und ihre Erzeuger

Definition 1.8 (σ-Algebra)

Sei ein Grundraum $\Omega \neq \emptyset$ gegeben. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt ***σ-Algebra*** *auf (oder in) Ω genau dann, wenn gilt:*

A1) $\Omega \in \mathcal{A}$

A2) $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$

A3) $(A_n)_{n\geq 1}$ *Folge in* $\mathcal{A} \implies \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$

Das Paar $(\Omega, \mathcal{A})$ heißt **Messraum**.

Bemerkung 1.9: Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ Messraum, dann gilt

1) $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$
2) Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ Folge in $\mathcal{A} \implies \bigcap_{n\geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c \in \mathcal{A}$
3) Seien $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{A}$, so ist $\bigcup_{i=1}^k A_i = \bigcup_{i=1}^k A_i \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots \in \mathcal{A}$ und $\bigcap_{i=1}^k A_i = \bigcap_{i=1}^k A_i \cap \Omega \cap \Omega \cap \dots \in \mathcal{A}$.
4) Sind $A, B \in \mathcal{A}$, dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B = A \cap B^c$ und $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ in $\mathcal{A}$, denn $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c \in \mathcal{A}$

Proposition 1.10

Sei T eine nicht-leere, endliche oder unendliche Indexmenge und $\mathcal{A}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebren auf Ω für alle $t \in T$, dann ist auch $\bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t$ eine σ-Algebra auf Ω.

Beweisskizze: Ist $A \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t$, so ist $A \in \mathcal{A}_t$ für alle $t \in T$ und damit auch $A^c \in \mathcal{A}_t$ für alle t, also ist auch $A^c \in \bigcap_{t\in T} \mathcal{A}_t$. Die Eigenschaften A1) und A3) aus Definition 1.8 folgen analog. $\square$

Definition 1.11 (Erzeugte σ-Algebra)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, dann heißt

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \ \sigma\text{-Algebra und } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra. $\sigma(\mathcal{E})$ ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält.

Bemerkung 1.12: Jede σ-Algebra enthält entweder endlich viele oder überabzählbar unendlich viele Elemente.

Beispiel 1.13:

a) $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$ sind σ-Algebren auf Ω.

b) Sei $A \subset \Omega$ und $\mathcal{E} = \{A\}$, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

c) Sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{E} = \{\{i\};\ i \in \mathbb{N}\}$, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, denn für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \supset \mathcal{E}$ und jedes $A \subset \mathbb{N}$ ist $A = \bigcup_{j \in A}\{j\} \in \mathcal{A}$.

d) Sei $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ ein Messraum und $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, dann ist

$$\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra auf Ω_1, die **von $\boldsymbol{f}$ induzierte $\boldsymbol{\sigma}$-Algebra** auf Ω_1. Dabei ist $f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in A\}$ das Urbild von A unter f.

e) Für $\Omega' \subset \Omega$ und $f = \mathrm{id}|_{\Omega'} : \Omega' \to \Omega$ ergibt sich aus d) die **Spur-$\boldsymbol{\sigma}$-Algebra**

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \Omega' \cap \mathcal{A} := \{\Omega' \cap A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

Definition 1.14

Sei $\Omega = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^k$ das System der offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, dann heißt $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{O}^k)$ die **Borel'sche σ-Algebra** *auf $\mathbb{R}^k$. Sei $\mathcal{C}^k$ das System der abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^k$, dann gilt ebenso $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{C}^k)$*

Bemerkung 1.15: Seien

$$\mathcal{E}_1 = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\}, \qquad \mathcal{E}_2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\},$$
$$\mathcal{E}_3 = \{(-\infty,b] \mid b \in \mathbb{R}^k\}, \qquad \mathcal{E}_4 = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\},$$

dann gilt $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{E}_i)$ für $i = 1, \ldots, 4$.

Um die Gleichheit $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ zweier erzeugter σ-Algebren nachzuweisen, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$ und $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ gilt.

Aus der ersten Relation folgt $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2)$, aus der zweiten $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, zusammen also $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2)$.

Definition 1.16 (Ring und Algebra)

Sei $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(\Omega)$*.*

a) $\mathcal{R}$ *heißt* **Ring** *(in* Ω*) genau dann, wenn*

R1) $\emptyset \in \mathcal{R}$,
R2) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{R}$,
R3) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$.

b) *Ein Ring* $\mathcal{R}$ *heißt* **Algebra***, wenn* $\Omega \in \mathcal{R}$*.*

Bemerkung 1.17:

a) Ist $\mathcal{R}$ ein Ring und sind $A, B \in \mathcal{R}$, dann gilt $A \Delta B \in \mathcal{R}$ und $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

b) $\mathcal{R}$ ist eine Algebra genau dann, wenn

1) $\emptyset \in \mathcal{R}$,
2) $A, B \in \mathcal{R} \implies A \cup B \in \mathcal{R}$,
3) $A \in \mathcal{R} \implies A^c \in \mathcal{R}$.

c) Seien T eine beliebige, nicht-leere Indexmenge und $\mathcal{R}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Ringe (Algebren) in Ω, dann ist $\bigcap_{t \in T} \mathcal{R}_t$ ein Ring (Algebra).

Definition 1.18 (Erzeugte Ringe und Algebren)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, dann heißt

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{R} \mid \mathcal{R} \text{ Ring}, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}\}$$

der **von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring** *und*

$$\alpha(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ Algebra}, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}$$

die **von $\mathcal{E}$ erzeugte Algebra***.*

Es gelten die Inklusionen $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{R}(\mathcal{E}) \subseteq \alpha(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

Beispiel 1.19: Sei $\Omega = \mathbb{R}^k$, $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \{(a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}^k,\ a \leq b\} \subset \mathcal{B}^k$ das System der halboffenen Intervalle. Dann ist

$$\mathcal{R}(\mathcal{E}) = \mathcal{F}^k := \left\{ \bigcup_{i=1}^{n} I_i \mid n \in \mathbb{N},\ (I_i) \subset \mathcal{E} \text{ paarweise disjunkt} \right\}$$

der **Ring der k-dimensionalen Figuren**.

Hintergrund für das vorhergehende Beispiel ist:

a) $\mathcal{E}_1$ ist ein **Semiring**, d.h.

SR1) $\emptyset \in \mathcal{E}_1$,
SR2) $A, B \in \mathcal{E}_1 \implies A \cap B \in \mathcal{E}_1$,
SR3) $A, B \in \mathcal{E}_1 \implies$ es ex. paarweise disjunkte $(A_i) \subset \mathcal{E}_1$, so dass $A \setminus B = \bigcup_{i=1}^n A_i$.

b) Ist $\mathcal{E}_1$ ein Semiring, dann ist $\mathcal{R} := \left\{\bigcup_{i=1}^n I_i \mid (I_i) \subset \mathcal{E}_1 \text{ paarweise disjunkt}\right\}$ ein Ring.

Eine weitere Art von Mengensystemen, die Dynkin-Systeme, sind für viele beweise nützlich.

Definition 1.20 (Dynkin-System)

$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *heißt* **Dynkin-System**, *wenn*

D1) $\Omega \in \mathcal{D}$,

D2) $E, F \in \mathcal{D}, E \subseteq F \implies F \setminus E \in \mathcal{D}$,

D3) *Seien* $(D_i) \subseteq \mathcal{D}$ *paarweise disjunkt* $\implies \bigcup_{i=1}^\infty D_i \in \mathcal{D}$.

Beispiel 1.21:

a) σ-Algebren sind Dynkin-Systeme.

b) Sei Ω eine endliche Menge, $|\Omega|$ gerade sowie $|\Omega| \geq 4$.
Setze $\mathcal{D} := \{D \subseteq \Omega \mid |D| \text{ ist gerade}\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, aber keine σ-Algebra, denn $\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_2, \omega_3\} \in \mathcal{D}$, aber $\{\omega_1, \omega_2\} \cup \{\omega_2, \omega_3\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} \notin \mathcal{D}$.

Bemerkung 1.22: Seien T eine beliebige, nicht-leere Indexmenge und $\mathcal{D}_t \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ Dynkin-Systeme, dann ist auch $\bigcap_{t \in T} \mathcal{D}_t$ ein Dynkin-System.

Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\mathcal{D}(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{D} \text{ Dynkin-System} \mid \mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}\}$ ein Dynkin-System, das **von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System**.

Ein Mengensystem $\mathcal{G}$ heißt $\cap$-**stabil**, falls für $G_1, G_2 \in \mathcal{G}$ auch $G_1 \cap G_2 \in \mathcal{G}$ ist.

Satz 1.23

a) *Sei $\mathcal{D}$ ein $\cap$-stabiles Dynkin-System. Dann ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.*

b) *Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ $\cap$-stabil, dann gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.*

Beweis:

a) Sind $A, B \in \mathcal{D}$, dann ist auch $A \cup B \in \mathcal{D}$, denn $A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B)) \in \mathcal{D}$, und $A \cap B$ ist wegen der $\cap$-Stabilität in $\mathcal{D}$, ferner ist $(A \cap B) \subseteq B$, womit die Behauptung aus Eigenschaft D2) folgt.

Per Induktion folgt, das für $(D_i) \subseteq \mathcal{D}$ auch die endlichen Vereinigungen in $\mathcal{D}$ sind, d.h. $A_n := \bigcup_{i=1}^n D_i \in \mathcal{D}$.

Aus D2) und D3) folgt damit $\bigcup_{i=1}^\infty D_i = \bigcup_{i=1}^\infty (A_i \setminus A_{i-1}) \in \mathcal{D}$, d.h. Eigenschaft A3) für σ-Algebren ist erfüllt. Nach D1) und D2) enthält $\mathcal{D}$ auch Komplemente, so dass ebenfalls A2) erfüllt ist. A1) ist durch D1) automatisch erfüllt, also ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra.

b) Da $\sigma(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System ist (Beispiel 1.21 a)) mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$, ist $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

Es genügt daher zu zeigen, dass $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil ist, denn dann ist nach Teil a) $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra und damit $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}(\mathcal{E})$; zusammen folgt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$.

Zum Nachweis der $\cap$-Stabilität definiere für $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ die **„good sets“**

$$\mathcal{D}_D := \{Q \subseteq \Omega \mid Q \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

$\mathcal{D}_D$ ist ein Dynkin-System, denn

1) $\Omega \in \mathcal{D}_D$
2) Für $E, F \in \mathcal{D}_D$ mit $E \subseteq F$ gilt
$(F \setminus E) \cap D = \underbrace{(F \cap D)}_{\in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \setminus \underbrace{(E \cap D)}_{\in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, also $F \setminus E \in \mathcal{D}_D$.
3) Für eine disjunkte Folge (D_i) in $\mathcal{D}_D$ gilt
$\left(\bigcup_{i\geq 1} D_i\right) \cap D = \bigcup_{i \geq 1}(D_i \cap D) \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, also $\bigcup_{i\geq 1} D_i \in \mathcal{D}_D$.

Da $\mathcal{E}$ n.V. $\cap$-stabil ist, gilt für alle $E \in \mathcal{E}$: $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$, also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$.

Also gilt für alle $E \in \mathcal{E}$, $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, dass $E \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, woraus $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$ und damit (da $\mathcal{D}_D$ Dynkin-System) $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$ folgt. Letzteres bedeutet aber, dass für beliebiges $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ und jedes $D' \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ der Schnitt $D' \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist, also ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil. $\square$

Grundlegend für die Integrationstheorie ist die folgende

Definition 1.24 (Messbare Abbildungen)

Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *Messräume. Eine Abbildung* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *heißt* $\mathcal{A}_1$*-*$\mathcal{A}_2$*-messbar, falls* $\sigma(f) = f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$*. Liegen* $\mathcal{A}_1$ *und* $\mathcal{A}_2$ *fest, sagt man auch:* f *ist messbar.*

Beispiel 1.25:

1) Konstante Abbildungen sind stets messbar: Ist $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ mit $f(\Omega_1) = \omega_2 \in \Omega_2$, so ist $f^{-1}(A_2) = \emptyset$ für alle $A_2 \in \mathcal{A}_2$ mit $\omega_2 \notin A_2$, und $f^{-1}(A_2') = \Omega_1$ für alle $A_2' \in \mathcal{A}_2$ mit $\omega_2 \in A_2'$, d.h. $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{\emptyset, \Omega_1\} \subseteq \mathcal{A}_1$.

2) Indikatorfunktionen messbarer Mengen sind messbar, genauer: Sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ beliebig, setze $\Omega_2 = \{0, 1\}$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega_2)$. Für $A \subset \Omega_1$ sei $f := \mathbb{1}_A : \Omega_1 \to \Omega_2$, dann ist $f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega_1\} \subseteq \mathcal{A}_1$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{A}_1$.

Proposition 1.26

Verkettungen messbarer Abbildungen sind messbar: Seien (Ω_i, cA_i) *Messräume für* $i = 1, 2, 3$, *dann ist* $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ *ist* $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_3$*-messbar, falls* $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$*-messbar ist und* $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}_3$*-messbar ist.*

Beweis: $(g \circ f)^{-1}(\mathcal{A}_3) = f^{-1}\big(\underbrace{g^{-1}(\mathcal{A}_3)}_{\subseteq \mathcal{A}_2}\big) \subset \mathcal{A}_1.$ □

Proposition 1.27

Seien $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ *und* $\mathcal{E}_2 \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$*, dann gilt:*

a) $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$.

b) *Ist* $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E}_2)$ *und* $\mathcal{A}_1$ *eine* σ*-Algebra auf* Ω_1*, so ist* f *genau dann* $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$*-messbar, falls* $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$.

Beweis:

a) $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$ und $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$ ist eine σ-Algebra, somit gilt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$.

Somit bleibt zu zeigen dass auch $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ gilt.
Dazu definiere die „good sets“
$\mathcal{A}_0 := \{F \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(F) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))\}$.
Dann gilt $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{A}_0$ nach Definition von $\mathcal{A}_0$, ferner ist $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra. Folglich ist $\sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{A}_0$, also gilt $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2)) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}_0) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))$ nach Definition von $\mathcal{A}_0$.

b) Wenn f $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}_2$-messbar ist, gilt wegen $\mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{A}_2$ stets $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$. Gilt umgekehrt $f^{-1}(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{A}_1$, so ist

$$f^{-1}(\mathcal{A}_2) = f^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E}_2)\big) \underset{\text{a)}}{=} \sigma\big(\underbrace{f^{-1}(\mathcal{E}_2)}_{\subseteq \mathcal{A}_1}\big) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1) = \mathcal{A}_1. \qquad \square$$

Anwendung: Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ ist $\mathcal{B}^p$-$\mathcal{B}^q$-messbar.

Beweis: Bezeichnen $\mathcal{O}^p$ und $\mathcal{O}^q$ die Systeme der offenen Mengen im $\mathbb{R}^p$ bzw. $\mathbb{R}^q$, so gilt wegen der Stetigkeit von f: $f^{-1}(\mathcal{O}^q) \subseteq \mathcal{O}^p \subseteq \mathcal{B}^p$. Wegen $\mathcal{B}^q = \sigma(\mathcal{O}^q)$ folgt die Behauptung aus Teil b) von Proposition 1.27. $\square$

Sei $f : \Omega \to \Omega_1$, wobei $\Omega \neq \emptyset$ und $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ Messraum.
Wie groß muss eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf Ω sein, damit f $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_1$ messbar ist?
$\mathcal{A}$ muss zumindest $f^{-1}(\mathcal{A}_1) \subseteq \mathcal{A}$ erfüllen, d.h. $f^{-1}(\mathcal{A}_1)$ ist die kleinste σ-Algebra auf Ω, so dass f messbar ist.

Analog: Sei $(f_i)_{i \in I}$ Familie von Abbildungen $f : \Omega \to \Omega_i$ mit $\Omega \neq \emptyset$ und $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$ Messraum für alle i, dann ist *die von* $(f_i)_{i \in I}$ *erzeugte* σ*-Algebra* $\sigma(f_i,\, i \in I) = \sigma\big(\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$ die kleinste σ-Algebra auf Ω, so dass alle f_i $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_i$-messbar sind.

Produkträume

Sei $(\Omega_i)_{i \in I}$ eine Familie nicht-leerer Mengen, dann heißt

$$\Omega = \bigtimes_{i \in I} \Omega_i = \{(\omega_i)_{i \in I} \mid \omega_i \in \Omega_i\}$$

Produktraum der Ω_i. Für $\emptyset \neq S \subseteq I$ definiere die *Projektionen*

$$\pi_S^I = \pi_S : \bigtimes_{i \in I} \Omega_i \to \bigtimes_{i \in S} \Omega_i, \quad (\omega_i)_{i \in I} \mapsto (\omega_i)_{i \in S}$$

Speziell für $S = \{j\}$: $\pi_{\{j\}}^I = \pi_j : \bigtimes_{i \in I} \Omega_i \to \Omega_j, \quad (\omega_i)_{i \in I} \mapsto \omega_j$.

Definition 1.28 (Produkt-σ-Algebra)

Sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)_{i\in I}$ Familie von Messräumen. Die von den Projektionen $(\pi_i)_{i\in I}$ erzeugte σ-Algebra $\mathcal{A} := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$ heißt **Produkt-σ-Algebra***. $(\times_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ heißt das* **Produkt der Messräume** *$((\Omega_i, \mathcal{A}_i))_{i\in I}$.*

Lemma 1.29

Sei S eine nicht-leere Teilmenge von I, dann ist die Projektion $\pi_S : \times_{i\in I} \to \times_{i\in S} \Omega_i$ $\bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$-$\bigotimes_{i\in S} \mathcal{A}_i$-messbar.

Beweis: Nach Definition ist $\bigotimes_{i\in S} \mathcal{A}_i = \sigma\big(\bigcup_{i\in S} (\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{A}_i)\big)$, ferner

$$\pi_S^{-1}\left(\bigcup_{i\in S} (\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) = \bigcup_{i\in S} \pi_S^{-1}(\pi_i^S)^{-1}(\mathcal{A}_i) = \bigcup_{i\in S} (\pi_i)^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

Aus Proposition 1.27 b) folgt die Behauptung. □

Proposition 1.30

Sei $(\Omega, \mathcal{A}) := (\times_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \mathcal{A}_i)$ und ferner $\mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{E}_i)$ für alle $i \in I$. Dann ist $\mathcal{A} = \sigma\big(\bigcup_{i\in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\big)$.

Beweis:

$$\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}\big(\sigma(\mathcal{E}_i)\big)\right)$$

$$\underset{\text{Prop. 1.27 a)}}{=} \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\sigma\big(\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\big)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\right),$$

da $\sigma\big(\pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j)\big) \subseteq \sigma\big(\bigcup_{i\in I}\pi_i^{-1}(\mathcal{E}_i)\big)$ für alle $j \in I$. $\square$

Definition 1.31

Sei $((\Omega_i, \mathcal{A}_i))_{i\in I}$ eine Familie von Messräumen und $\mathcal{P}_0(I) := \{J \subseteq I \mid J$ nicht-leer und endlich$\}$.

$\mathcal{S} := \bigcup_{J\in\mathcal{P}_0(I)}\big\{\bigtimes_{i\in J} A_i \times \bigtimes_{i\in I\setminus J}\Omega_i \mid A_i \in \mathcal{A}_i\,\forall\, i \in J\big\}$ heißt die Menge der **messbaren Rechtecke***.*

$\mathcal{Z} := \bigcup_{J\in\mathcal{P}_0(I)}\big\{A_J \times \bigtimes_{i\in I\setminus J}\Omega_i \mid A_J \in \bigotimes_{i\in J}\mathcal{A}_i\big\} = \bigcup_{J\in\mathcal{P}_0(I)}\pi_J^{-1}(\mathcal{A}_J)$ (mit $\mathcal{A}_J = \bigotimes_{i\in J}\mathcal{A}_i$) heißt die Menge der **Zylindermengen***.*

Proposition 1.32

Sei $((\Omega_i, \mathcal{A}_i))_{i \in I}$ *eine Familie von Messräumen, dann ist* $\mathcal{A} := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i = \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{Z})$.

Beweis: Zeige $\mathcal{S} \subset \mathcal{Z} \subset \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$, dann folgt $\sigma(\mathcal{S}) \subseteq \sigma(\mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$ und damit die Behauptung.

$\mathcal{S} \subset \mathcal{Z}$: Sei $A \in \mathcal{S}$, z.B.
$A = A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} \times \bigtimes_{i \notin J} \Omega_i = \pi_J^{-1}(A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n})$ mit $J = \{i_1, \ldots, i_n\}$.
Dann ist $A_{i_1} \times \ldots \times A_{i_n} = (\pi_{i_1}^J)^{-1}(A_{i_1}) \cap \ldots \cap (\pi_{i_n}^J)^{-1}(A_{i_n}) \in \mathcal{A}_J$.

$\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}$: π_J ist $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}_J$-messbar, also ist $\pi_J^{-1}(\mathcal{A}_J) \subset \mathcal{A}$ für alle $J \in \mathcal{P}_0(I)$.

$\mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{S})$: Für alle $i \in I$, $A_i \in \mathcal{A}_i$ ist $\pi_i^{-1}(A_i) = A_i \times \bigtimes_{j \neq i} \Omega_j \in \mathcal{S}$, also gilt für alle $i \in I$, dass $\pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{S}$, d.h. $\mathcal{A} = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right) \subseteq \sigma(\mathcal{S})$.
$\square$

Bermerkung: Die Menge $\mathcal{Z}$ der Zylindermengen ist eine Algebra.

Proposition 1.33

Sei $(\Omega, \mathcal{A}) = (\times_{i \in I} \Omega_i, \bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i)$ mit beliebigem I. Dann existiert zu jeder Menge $A \in \mathcal{A}$ eine höchstens abzählbare Teilmenge $T \subseteq I$ und ein $B \in \bigotimes_{i \in T} \mathcal{A}_i$, so dass $A = B \times \times_{i \setminus T} \Omega_i$, d.h. A hängt nur von höchstens abzählbar vielen Koordinaten ab.

Beweis: Sei $\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{A} \mid \text{es existieren } B, T \text{ wie im Satz}\}$. Wegen $\mathcal{Z} \subset \mathcal{A}^*$ genügt es nach Proposition 1.32 zu zeigen, dass $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra.

1. $\Omega = \times_{i \in I} \Omega_i \in \mathcal{A}^*$
2. Sei $A = B \times \times_{i \in I \setminus T} \Omega_i \in \mathcal{A}^*$, dann ist $A^c = \tilde{B} \times \times_{i \in I \setminus T} \Omega_i \in \mathcal{A}^*$ für ein geeignetes $\tilde{B}$.
3. Sei $(A_n)_{n \geq 1}$ Folge in $\mathcal{A}^*$, etwa $A_n = B_n \times \times_{i \in I \setminus T_n} \Omega_i$ mit höchstens abzählbarem T_n und $B_n \in \bigotimes_{i \in T_n} \mathcal{A}_i$. Sei $T := \bigcup_{n \geq 1} T_n$ und $B_n' := B_n \times \times_{i \in T \setminus T_n} \Omega_i \in \bigotimes_{i \in T} \mathcal{A}_i$.
   Dann ist T höchstens abzählbar, und es gilt $A_n = B_n' \times \times_{i \in I \setminus T} \Omega_i$, also $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \left(\bigcup_{n \geq 1} B_n'\right) \times_{i \in I \setminus T} \Omega_i \in \mathcal{A}^*$. □

Bemerkung 1.34: Es gilt $\mathcal{B}^k = \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{B}^1$, d.h. die Borel-$\sigma$-Algebra $\mathcal{B}^k$ auf $\mathbb{R}^k$ entspricht gerade dem k-fachen Produkt $\bigotimes_{i=1}^k \mathcal{B}^1$ der Borelσ-Algebra $\mathcal{B}^1$ auf $\mathbb{R}$.

Beweis: Für den Erzeuger $\mathcal{E}_1$ von $\mathcal{B}^k$ aus Bemerkung 1.15 gilt $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{S}$, also ist $\mathcal{B}^k = \sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{S}) = \bigotimes_{i=1}^k \mathcal{B}^1$.
Andererseits ist $\pi_i : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ stetig für alle $1 \leq i \leq k$, also $\mathcal{B}^k$-$\mathcal{B}^1$-messbar (vgl. Anwendung nach Prop. 1.27). Da $\bigotimes_{i=1}^k \mathcal{B}^1$ von den π_i erzeugt wird, also die kleinste σ-Algebra ist, bzgl. der alle π_i messbar sind, muss auch $\bigotimes_{i=1}^k \mathcal{B}^1 \subseteq \mathcal{B}^k$ gelten. $\square$

Nützliche Definitionen und Ergebnisse aus der Topologie

Definition 1.35 (Topologie)

Ein Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt Topologie, falls

1) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{O}$,
2) *Für $A, B \in \mathcal{O}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{O}$,*
3) *Sei I eine beliebige (auch überabzählbare) Indexmenge und $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$*

Definition 1.35 (Forts.)

$(\Omega, \mathcal{O})$ *heißt* **topologischer Raum**, *Mengen* $A \in \mathcal{O}$ *heißen* **offen**, *Mengen* $A \subseteq \Omega$ *mit* $A^c \in \mathcal{O}$ *heißen* **abgeschlossen**.

Definition 1.36

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ *topologischer Raum und* $A \subseteq \Omega$, *dann heißt*

$$\mathring{A} := \bigcup \{ O \subseteq A \mid O \in \mathcal{O} \} \quad \textit{das } \textbf{Innere von } \boldsymbol{A}$$

und

$$\overline{A} := \bigcap \{ F \supseteq A \mid F^c \in \mathcal{O} \} \quad \textit{der } \textbf{Abschluss von } \boldsymbol{A}.$$

Ein topologischer Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ *heißt* **separabel**, *falls er eine abzählbare, dichte Teilmenge besitzt, d.h. wenn eine abzählbare Teilmenge* $\Omega' \subseteq \Omega$ *existiert mit* $\overline{\Omega'} = \Omega$.

Definition 1.37 (Basis einer Topologie)

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}$, dann heißt $\mathcal{B}$ eine **Basis** *von $\mathcal{O}$, falls*

$$\forall A \in \mathcal{O}\, \forall \omega \in A \quad \exists B \in \mathcal{B} : \omega \in B \subseteq A.$$

Das ist genau dann der Fall, wenn

$$\mathcal{O} = \{A \subseteq \Omega\, \forall \omega \in A \quad \exists B \in \mathcal{B} : \omega \in B \subseteq A\} \tag{$*$}$$

oder äquivalent

$$\mathcal{O} = \left\{ \bigcup_{i \in I} B_i \mid B_i \in \mathcal{B} \text{ für alle } i \in I, I \text{ beliebig} \right\}. \tag{$**$}$$

Durch $(*)$ oder $(**)$ wird eine Topologie $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ auf Ω definiert, die von $\mathcal{B}$ erzeugte Topologie.

Definition 1.38 (Metrik)

Eine Funktion $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}_+$ *heißt* **Metrik**, *falls gilt:*

1) $r(\omega, \omega') \neq 0$ *für* $\omega \neq \omega'$,
2) $r(\omega, \omega') = r(\omega', \omega)$ *für alle* $\omega, \omega' \in \Omega$,
3) $r(\omega, \omega'') \leq r(\omega, \omega') + r(\omega', \omega'')$ *für alle* $\omega, \omega', \omega'' \in \Omega$.

Das Paar (Ω, r) *heißt* **metrischer Raum**.

Für $\omega \in \Omega$ *und* $\epsilon > 0$ *bezeichne* $B_\epsilon(\omega) = \{\omega' \in \Omega \mid r(\omega, \omega') < \epsilon\}$ *den* **offenen Ball** *(oder auch* **offene Kugel***) um* ω *mit Radius* ϵ.

Eine Metrik r *auf* Ω *heißt* **vollständig**, *wenn jede Cauchy-Folge (bzgl. der Metrik) konvergiert, d.h. ist* $\omega_1, \omega_2, \ldots \in \Omega$ *eine Folge mit*

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, N \in \mathbb{N}\ \forall\, m, n \geq N\ :\ r(\omega_m, \omega_n) < \epsilon,$$

dann existiert ein $\omega \in \Omega$ *mit* $r(\omega_n, \omega) \to 0$ *für* $n \to \infty$.

Definition 1.39

Sei (Ω, r) ein metrischer Raum und $\mathcal{B} := \{B_\epsilon(\omega) \mid \epsilon > 0, \omega \in \Omega\}$, dann heißt $\mathcal{O}(\mathcal{B})$ die **von *r* erzeugte Topologie***.*

Der Raum $(\omega, \mathcal{O})$ heißt **(vollständig) metrisierbar***, wenn es eine (vollständige) Metrik r auf Ω gibt, die $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B})$ erzeugt.*

Der Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ heißt **polnisch***, falls er separabel und vollständig metrisierbar ist.*

Lemma 1.40

Sei (Ω, r) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von r erzeugte Topologie, dann sind für $F \subseteq \Omega$ äquivalent:

a) *F ist abgeschlossen.*

b) *Für alle Folgen $\omega_1, \omega_2, \ldots \in F$ und $\omega \in \Omega$ mit $\omega_n \to \omega$ für $n \to \infty$ gilt $\omega \in F$.*

Insbesondere besteht für jedes $A \subseteq \Omega$ der Abschluss $\overline{A}$ genau aus den Häufungspunkten von A.

Beweis: Eine Folge $(\omega_i)_{i\geq 1}$ konvergiert gegen ein $\omega \in \Omega$ genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\omega_i \in B_\epsilon(\omega)$ für alle $i \geq N$, oder anders ausgedrückt, wenn für jedes $\epsilon > 0$ fast alle Folgenglieder in $B_\epsilon(\omega)$ liegen.

$a) \Rightarrow b)$: Sei F abgeschlossen und $\omega_1, \omega_2, \ldots \in F$ eine in F liegende Folge, die gegen ein $\omega \in F^c$ konvergiert. Da F^c offen ist, gibt es ein hinreichend kleines $\epsilon_1 > 0$, so dass $B_{\epsilon_1}(\omega) \subset F^c$. Da aber die Folge $(\omega_i)_{i\geq 1}$ nach Voraussetzung gegen ω konvergiert, müssen fast alle Folgenglieder in $B_{\epsilon_1}(\omega) \subset F^c$ liegen, was der Voraussetzung $\omega_i \in F$ für alle i widerspricht. Also muss $\omega \in F$ gelten.

$b) \Rightarrow a)$: Wäre F nicht abgeschlossen und damit F^c nicht offen, muss es ein $\omega \in F^c$ geben, so dass für alle $\epsilon > 0$ gilt, dass $B_\epsilon(\omega) \not\subseteq F^c$, also ist für alle $\epsilon > 0$ der Schnitt $B_\epsilon(\omega) \cap F$ nicht leer. Daher gibt es für eine absteigende Folge $\epsilon_1 > \epsilon_2 > \ldots$ mit $\epsilon_n \downarrow 0$ eine Folge $(\omega_i)_{i\geq 1}$, so dass $\omega_n \in B_{\epsilon_n}(\omega) \cap F$. Nach Konstruktion liegt die Folge $(\omega_i)_{i\geq 1}$ in F und konvergiert gegen $\omega \in F^c$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass F die Grenzwerte aller Folgen enthält, die in F liegen. $\square$

Bemerkung 1.41: Ist $(\Omega, \mathcal{O})$ ein polnischer Raum, so erhält man mit praktisch demselben Beweis wie in Lemma 1.40 für $A \subseteq \Omega$ die Äquivalenz

$$A \text{ abgeschlossen} \iff A \text{ ist vollständig}$$

Lemma 1.42

Sei (Ω, r) ein separabler metrischer Raum, $\mathcal{O}$ die von r erzeugte Topologie, Ω' eine abzählbare Teilmenge von Ω mit $\overline{\Omega'} = \Omega$, und

$$\tilde{\mathcal{B}} := \{B_\epsilon(\omega) \mid \epsilon \in \mathbb{Q}_+, \, \omega \in \Omega'\}.$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{B}}$ abzählbar und $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{B}}) = \mathcal{O}$.

Beweis: Klar ist, dass $\tilde{\mathcal{B}}$ abzählbar ist (Vereinigungen abzählbar vieler abzählbarer Mengen sind wiederum abzählbar) und $\mathcal{O}(\tilde{\mathcal{B}}) \subseteq \mathcal{O}$. sei $\mathcal{B}$ wie in Definition 1.39, dann gilt für $B_\epsilon(\omega) \in B$, dass

$$B_\epsilon(\omega) = \bigcup_{\tilde{\mathcal{B}} \ni B \subseteq B_\epsilon(\omega)} B$$

(da die rationalen Zahlen dicht in den reellen Zahlen liegen), also ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{B}})$ und damit $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{O}(\tilde{\mathcal{B}})$. $\square$

Definition 1.43 ((Prä-)Kompaktheit und Folgenkompaktheit)

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ topologischer Raum und $K \subseteq \Omega$.

a) *Die Menge K heißt* **kompakt**, *falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h. sind $O_i \in \mathcal{O}$ für alle $i \in I$ mit beliebigem I und $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$, so existiert eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $K \subseteq \bigcup_{j \in J} O_j$.*

b) *Eine Menge K heißt* **relativ kompakt**, *falls $\overline{K}$ kompakt ist.*

c) *Eine Menge K heißt* **(relativ) folgenkompakt**, *falls es für jede ganz in K liegende Folge eine in K $(\overline{K})$ konvergente Teilfolge gibt, d.h. für jede Folge $\omega_1, \omega_2, \ldots \in K$ existiert eine Teilfolge $\omega_{n_1}, \omega_{n_2} \in K$ und ein $\omega \in K$ (bzw. $\in \overline{K}$) mit $\omega_{n_k} \to \omega$ für $k \to \infty$.*

d) *Sei r eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{O}$ erzeugt, dann heißt eine Menge K* **präkompakt** *oder auch* **totalbeschränkt**, *wenn für alle $\epsilon > 0$ eine endliche Anzahl von Punkten $\omega_1, \ldots, \omega_n \in K$ existiert, so dass gilt*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\epsilon(\omega_i).$$

Bemerkung 1.44: Äquivalent zu obiger Kompaktheitsdefinition ist: Eine Menge K ist kompakt, wenn für jede Folge $(F_i)_{i\in I}$ abgeschlossener Mengen mit $F_i \subseteq K$ für alle $i \in I$ gilt, dass aus $\bigcap_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ folgt, dass auch $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.
Existierte nämlich eine Folge abgeschlossener Teilmengen $(F_i)_{i\in I}$ von K, deren endliche Schnitte $K_J := \bigcap_{j\in J} F_j \subseteq K$ nicht leer sind, jedoch $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset$, so folgte durch den Übergang zu den Komplementen, dass $\bigcup_{i\in I} F_i^c = \Omega \supseteq K$ eine offene Überdeckung von von K ist, die keine endliche Teilüberdeckung von K besitzt, da für jede endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gilt, dass $\bigcup_{j\in J} F_j^c$ die nicht-leere Teilmenge $K_J \subseteq K$ nicht überdeckt. Die Umkehrung zeigt man analog.

Satz 1.45

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein polnischer Raum und $K \subseteq \Omega$. Dann sind äquivalent:

a) *K ist folgenkompakt,*

b) *K ist präkompakt und vollständig,*

c) *K ist kompakt.*

Beweis:

a) $\Rightarrow$ b): Sei $(\omega_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine Cauchy-Folge. Da K n.V. folgenkompakt ist, muss die Cauchy-Folge eine konvergente Teilfolge besitzen, deren Grenzwert ω in K liegt. Dieses ω ist dann ein Häufungspunkt der Cauchy-Folge $(\omega_n)_{n\geq 1}$. Aus der Definition einer Cauchy-Folge folgt aber unmittelbar, dass eine solche Folge nur einen Häufungspunkt haben und keine divergenten Teilfolgen haben kann (ansonsten könnten nicht alle Glieder der Cauchy-Folge nicht ab einem gewissen Index n_0 beliebig nahe beieinander liegen). Also muss bereits die ganze Cauchy-Folge $(\omega_n)_{n\geq 1}$ gegen $\omega \in K$ konvergieren. Somit ist K vollständig.

Nehmen wir nun an, K sei nicht präkompakt, dann müsste ein $\epsilon_0 > 0$ existieren, für dass es keine endliche Anzahl von Punkten $(\omega_i)_{1\leq i\leq n} \subset K$ gäbe, so dass $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_{\epsilon_0}(\omega_i)$. Wir zeigen, dass wir unter dieser Annahme eine Folge $(\bar{\omega}_i)_{i\geq 1} \subset K$ finden könnten, die keine konvergente Teilfolge besitzt, was der Folgenkompaktheit von K widerspräche; daher muss die Annahme falsch und K doch präkompakt sein.
Die gewünschte Folge definieren wir induktiv: Wir wählen eine beliebiges $\bar{\omega}_1 \in K$ und nehmen an, die ersten Folgenglieder $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n$ seien bereits so definiert, dass $r(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_j) \geq \epsilon_0$ für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq j$.

Dann muss ein $\bar{\omega}_{n+1} \in K$ existieren, für das $r(\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_{n+1}) \geq \epsilon_0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, denn ansonsten hätten alle Elemente von K zu mindestens einem der $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_n$ einen Abstand $< \epsilon_0$ und würden daher in (mindestens) einer der offenen Kugeln $B_{\epsilon_0}(\bar{\omega}_i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ liegen. Das würde aber bedeuten dass sich K von den endlich vielen Kugeln $(B_{\epsilon_0}(\bar{\omega}_i))_{1 \leq i \leq n}$ überdecken ließe, was unserer Annahme widerspräche. Somit kann man die Folge der $\bar{\omega}_i$ in dieser Weise beliebig weit fortsetzen. Damit erhielte man aber eine Folge, bei der der Abstand zwischen zwei beliebigen ihrer Elemente stets $\geq \epsilon_0$ wäre, so dass diese Folge keinen Häufungspunkt und damit auch keine konvergente Teilfolge haben könnte. Das steht jedoch, wie zuvor bemerkt, im Widerspruch zur Folgenkompaktheit von K.

b) $\Rightarrow$ c): Sei K präkompakt und vollständig. Nehmen wir an, K sei nicht kompakt, dann gäbe es eine offene Überdeckung $(O_i)_{i \in I}$ von K, die keine endliche Teilüberdeckung besäße.
Wegen der Präkompaktheit von K existieren endlich viele offene Kugeln mit Radius 1, die K überdecken. Ließe sich jede dieser Kugeln mit endlich vielen der O_i überdecken, würde sich auch K selbst mit nur endlich vielen O_i überdecken lassen, im Widerspruch zur Annahme.

Es muss also eine Kugel $B_1 := B_1(\omega_1)$ existieren, so dass sich $K \cap B_1$ nicht von endlich vielen O_i überdecken lässt. Wir gehen erneut induktiv vor: Sei $B_{n-1} := B_{2^{-(n-1)}}(\omega_{n-1})$ bereits so gewählt, dass $K \cap B_{n-1}$ nicht von endlich vielen O_i überdeckt werden kann. Erneut wegen der Präkompaktheit von K existieren endlich viele Kugeln $C_1, \ldots, C_m$ mit Radius 2^{-n}, die K überdecken. Unter den Kugeln, für die $(K \cap B_{n-1}) \cap C_i \neq \emptyset$ gilt, muss wiederum mindestens eine geben, für die sich $K \cap C_i$ nicht von endlich vielen O_i überdecken lässt. Sei ω_n der Mittelpunkt von diesem C_i, setzen wir $B_n := B_{2^{-n}}(\omega_n)$. Wegen $B_n \cap B_{n-1} \neq \emptyset$ kann der Abstand $r(\omega_n, \omega_{n-1})$ der Mittelpunkte ω_n, ω_{n-1} von B_n bzw. B_{n-1} höchstens

$$r(\omega_n, \omega_{n-1}) \leq 2^{-(n-1)} + 2^{-n} \leq 2 \cdot 2^{-(n-1)} = 2^{-n+2}$$

sein. Wählen wir nun zu jedem B_n ein $\bar{\omega}_n \in K \cap B_n$, gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$r(\bar{\omega}_{n-1}, \bar{\omega}_n) \leq r(\bar{\omega}_{n-1}, \omega_{n-1}) + r(\omega_{n-1}, \omega_n) + r(\omega_n, \bar{\omega}_n) \leq \frac{3}{2^{n-2}}.$$

Dann folgt für $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n < m$, dass

$$\begin{aligned} r(\bar{\omega}_n, \bar{\omega}_m) &\leq r(\bar{\omega}_n, \bar{\omega}_{n+1}) + r(\bar{\omega}_{n+1}, \bar{\omega}_{n+2}) + \ldots + r(\bar{\omega}_{m-1}, \bar{\omega}_m) \\ &\leq \frac{3}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{m-n+1} \frac{1}{2^i} \leq \frac{3}{2^{n-2}}, \end{aligned}$$

somit ist die Folge $(\bar{\omega}_n)_{n \geq 1}$ eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit von K gegen ein $\bar{\omega} \in K$ konvergiert. Da die O_i eine Überdeckung von K bilden, existiert ein $i_0 \in I$ mit $\bar{\omega} \in O_{i_0}$. Da O_{i_0} offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(\bar{\omega}) \subset O_{i_0}$ sowie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $r(\bar{\omega}, \bar{\omega}_n) \leq \frac{3}{2^{n-2}} < \frac{\epsilon}{2}$ und somit auch $\frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{4}$.
Für jedes $\omega \in K \cap B_n$ gilt daher

$$r(\omega, \bar{\omega}) \leq r(\omega, \omega_n) + r(\omega_n, \bar{\omega}_n) + r(\bar{\omega}_n, \bar{\omega}) \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Das bedeutet aber, dass alle $\omega \in K \cap B_n$ in $B_\epsilon(\bar{\omega})$ und somit auch in O_{i_0} liegen. Also besitzt $K \cap B_n$ doch eine endliche Teilüberdeckung, nämlich O_{i_0}, was im Widerspruch zur Definition der B_n steht. Also muss unsere ursprünglich Annahme falsch sein und K sich doch durch endlich viele O_i überdecken lassen, also kompakt sein.

c) $\Rightarrow$ a): Sei $(\omega_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine Folge und $F_n := \overline{\{\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots\}}$ der Abschluss der Menge $\{\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots\}$. Wenn die Folge $(\omega_n)_{n\geq 1}$ keinen Häufungspunkt in K hätte, müsste $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$ gelten und damit auch $K \cap (\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n) = \emptyset$. Dann würde gelten

$$K \subseteq \left(\Omega \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus F_n),$$

wobei $\Omega \setminus F_n$ offen ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K n.V. kompakt ist, wird K auch von endlich vielen dieser Mengen überdeckt, d.h.

$$K \subseteq (\Omega \setminus F_{n_1}) \cup \ldots \cup (\Omega \setminus F_{n_k}) = \Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}.$$

Da die Mengen F_n absteigend sind, gilt für $n > \max_{1\leq i\leq k} n_i$, dass $F_n \bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}$ und somit auch $K \subseteq \Omega \setminus F_n$, woraus $K \cap F_n = \emptyset$ folgt. Das ist aber ein Widerspruch zur Definition von $F_n = \overline{\{\omega_n, \omega_{n+1}, \ldots\}}$, da die Folge $(\omega_n)_{n\geq 1}$ in K liegt. Somit muss die Folge doch einen Häufungspunkt und damit eine konvergente Teilfolge in K besitzen und K damit folgenkompakt sein. $\square$

Nach Definition 1.43 b) ist eine Menge $K \subseteq \Omega$ relativ kompakt, wenn ihr Abschluss $\overline{K}$ kompakt ist. Analog bedeutet relative Folgenkompaktheit, dass jede Folge $(\omega_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine in $\overline{K}$ konvergente Teilfolge besitzt. Da zudem nach Bemerkung 1.41 in polnischen Räumen Vollständigkeit äquivalent zur Abgeschlossenheit ist, erhält man aus dem vorherigen leicht den äquivalenten

Satz 1.45'

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein polnischer Raum und $K \subseteq \Omega$. Dann sind äquivalent:

a) *K ist relativ folgenkompakt,*

b) *K ist präkompakt,*

c) *K ist relativ kompakt.*

Da man die relative (Folgen)Kompaktheit einer Menge $K \subseteq \Omega$ durch den Nachweis der (Folgen)Kompaktheit von $\overline{K}$ zeigt, lässt sich der Beweis von Satz 1.45 nahezu wörtlich auf den vorliegenden Fall übertragen, man muss lediglich an einigen Stellen K durch $\overline{K}$ ersetzen.

Korollar 1.46

In einem polnischen Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ sind abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen selbst wieder kompakt.

Beweis: Sei $A \subseteq K \subseteq \Omega$ und K kompakt, so ist K nach Satz 1.45 b) präkompakt und damit auch A, da sich diese Eigenschaft offensichtlich auf Teilmengen überträgt. Da A abgeschlossen ist, ist A nach Bemerkung 1.41 auch vollständig, also nach Satz 1.45 b) selbst kompakt. $\square$

Bemerkung: Korollar 1.46 gilt allgemeiner auch unter den Voraussetzungen von Lemma 1.47.

Lemma 1.47

Sei (Ω, r) ein metrischer Raum und $\mathcal{O}$ die von r erzeugte Topologie. Ist $K \subseteq \Omega$ kompakt, so ist K auch abgeschlossen.

Beweis: Sei $\omega \in K^c$. Für alle $\omega' \in K$wähle $\delta_{\omega'}$ und $\epsilon_{\omega'}$, so dass $B_{\delta_{\omega'}}(\omega) \cap B_{\epsilon_{\omega'}}(\omega') = \emptyset$. Wegen $K \subseteq \bigcup_{\omega' \in K} B_{\epsilon_{\omega'}}(\omega')$ und der Kompaktheit von K gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq K$ mit $K \subseteq \bigcup_{\omega' \in J} B_{\epsilon_{\omega'}}(\omega')$. Sei nun $\delta := \min_{\omega' \in J} \delta_{\omega'} > 0$, so ist $B_\delta(\omega) \cap K \subseteq B_\delta(\omega) \cap \bigcup_{\omega' \in J} B_{\epsilon_{\omega'}}(\omega') = \emptyset$ und damit $B_\delta(\omega) \subseteq K^c$. Da $\omega \in K^c$ beliebig war, existiert somit für alle $\omega \in K^c$ eine offene Umgebung in K^c, also ist K^c offen und damit K abgeschlossen. $\square$

1.3 Inhalte, Prämaße und Maße

Definition 1.48 (Inhalt und Prämaß)

Sei $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$.

a) *μ heißt* **Inhalt** *auf $\mathcal{R}$, falls gilt:*

- I1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- I2) *μ ist endlich additive, d.h. für eine endliche Folge $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

b) *μ heißt* **Prämaß** *auf $\mathcal{R}$, wenn gilt*

- PM1) $\mu(\emptyset) = 0$.
- PM2) *μ ist σ-additiv, d.h. für eine Folge $(A_i)_{i \geq 1}$ paarweise disjunkter Mengen mit $\bigcup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{R}$ gilt*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\right) = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i).$$

Bemerkung 1.49:

a) Jedes Prämaß ist ein Inhalt.

b) Sei $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{R} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$. Dann ist $\mathcal{R}$ eine Algebra. Definiere $\mu : \mathcal{R} \to \{0, 1\}$ durch

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & A \text{ endlich}, \\ 1, & A^c \text{ endlich}, \end{cases} \quad A \in \mathcal{R}.$$

Dann ist μ ein Inhalt, aber kein Prämaß auf $\mathcal{R}$, denn sonst wäre

$$1 = \mu(\mathbb{N}) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{k\}\right) \neq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{k\}) = 0.$$

c) Lebesgue'scher Inhalt auf dem Ring $\mathcal{F}^k$ der k-dimensionalen Figuren (vgl. Beispiel 1.19): Definiere für $I = (a, b]$ mit $a = (a_1, \ldots, a_k)$ und $b = (b_1, \ldots, b_k)$ den Elementarinhalt

$$\lambda(I) := \prod_{i=1}^{k} (b_i - a_i).$$

Dann ist für $F \in \mathcal{F}^k$ mit $F = \bigcup_{i=1}^n I_i$, $I_i = (a^i, b^i]$ disjunkt, die Größe $\lambda(F) = \lambda\big(\bigcup_{i=1}^n I_i\big) = \sum_{i=1}^n \lambda(I_i)$ wohldefiniert und λ ein Inhalt auf $\mathcal{F}^k$, der **Lebesgue'sche Inhalt auf $\boldsymbol{\mathcal{F}^k}$**.

Proposition 1.50

Sei μ Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$, dann gilt:

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$ *für alle* $A, B \in \mathcal{R}$.

b) **Monotonie.** *Für* $A, B \in \mathcal{R}$ *mit* $A \subseteq B$ *gilt* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

   Falls $\mu(A) < \infty$, *so folgt* $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c) **Subadditivität.** $\mu\big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$.

d) **$\boldsymbol{\sigma}$-Subadditivität.** *Ist* $(A_i)_{i \geq 1}$ *eine Folge paarweise disjunkter Mengen mit* $A_i \in \mathcal{R}$ *für alle* i *und* $\bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{R}$, *so gilt* $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) \leq \mu\big(\bigcup_{i=1}^\infty A_i\big)$.

Zum Beweis siehe Rüschendorf, S. 12, oder Elstrodt, S. 32.

Definition 1.51 (lim inf und lim sup von Mengen)

Sei $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ *eine Folge von Mengen, dann ist*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m := \{\omega \in \Omega \mid \exists \text{ unendlich viele } m \text{ mit } \omega \in A_m\}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m := \{\omega \in \Omega \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ so dass } \omega \in A_m \; \forall\, m \geq n_0\}.$$

Bemerkung 1.52: Es gilt stets $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$.

Ist $\liminf_{n\to\infty} A_n = \limsup_{n\to\infty} A_n =: A$, dann heißt die Folge $(A_n)_{n\geq 1}$ *konvergent* mit $\lim_{n\to\infty} A_n := A$.
Für $(A_n)_{n\geq 1} \uparrow$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ für alle n ist $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
Analog gilt für $(A_n)_{n\geq 1} \downarrow$, dass $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Satz 1.53

Sei μ Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Für die Eigenschaften

a) *μ ist ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.*

b) **Stetigkeit von unten.** *Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ Folge in $\mathcal{R}$, $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow\ \mu(A_n) \uparrow \mu(A)$.*

c) **Stetigkeit von oben.** *Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ Folge in $\mathcal{R}$, $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ $\Rightarrow\ \mu(A_n) \downarrow \mu(A)$.*

d) **Stetigkeit in $\emptyset$.** *Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ Folge in $\mathcal{R}$, $A_n \downarrow \emptyset$, $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \Rightarrow\ \mu(A_n) \downarrow 0$.*

gelten die Implikationen a) $\iff$ b) $\implies$ c) $\iff$ d).
Ist μ endlich, sind a) bis d) äquivalent.

Für Wahrscheinlichkeitsmaße wurden wesentliche Teile des Satzes bereits in der Stochastik-Vorlesung bewiesen, die auf den allgemeinen Fall übertragbar sind. Einen allgemeinen Beweis findet man z.B. in den Büchern von Rüschendorf (S. 13f) oder Elstrodt (S. 32f).

Definition 1.54 (Kompaktes Mengensystem und kompakte Approximierbarkeit)

a) $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *heißt* **kompaktes Mengensystem**, *wenn für eine Folge* $(K_i)_{i\geq 1}$ *in* $\mathcal{K}$ *mit* $\bigcap_{i=1}^n K_i \neq \emptyset$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *folgt, dass auch* $\bigcap_{i=1}^\infty K_i \neq \emptyset$.

b) *Sei* μ *ein Inhalt auf einem Ring in* Ω.

   μ *heißt* **kompakt approximierbar**, *wenn ein kompaktes Mengensystem* $\mathcal{K}$ *existiert, so dass*

$$\forall\, A \in \mathcal{R} : \forall\, \epsilon > 0 : \exists K \in \mathcal{K} \textit{ und } B \in \mathcal{R} \textit{ mit } B \subseteq K \subseteq A \textit{ und } \mu(A \backslash B) < \epsilon.$$

Bemerkung: In einem topologischen Raum $(\Omega, \mathcal{O})$ ist das System der kompakten Teilmengen $K \subseteq \Omega$ ein kompaktes Mengensystem.

Satz 1.55

Sei $\mathcal{R}$ *ein Ring in* Ω *und* μ *ein endlicher Inhalt auf* $\mathcal{R}$. *Ist* μ *kompakt approximierbar, dann ist* μ *ein Prämaß auf* $\mathcal{R}$.

Beweis: Nach Satz 1.53 d) genügt es zu zeigen, dass μ stetig in $\emptyset$ ist. Dazu ist äquivalent: Ist $(A_n)_{n\geq 1}$ Folge in $\mathcal{R}$, $A_n \downarrow$ und $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) =: \alpha > 0$, dann folgt $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$.

Sei $\mathcal{K}$ kompaktes approximierendes Mengensystem wie in Definition 1.54, dann existieren $K_n \in \mathcal{K}$, $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) < \frac{\alpha}{2^{n+1}}$. Wegen $B_n = A_n \setminus (A_n \setminus B_n)$ folgt

$$\bigcap_{n=1}^{m} B_n = \bigcap_{n=1}^{m} A_n \setminus (A_n \setminus B_n) \supseteq \bigcap_{n=1}^{m} \left(A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{m} (A_i \setminus B_i)\right) = \bigcap_{n=1}^{m} A_n \setminus \left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \setminus B_i)\right)$$

Daraus folgt

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} B_n\right) \geq \mu\left(\bigcap_{i=1}^{m} A_n\right) - \underbrace{\mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} (A_i \setminus B_i)\right)}_{\leq \sum_{i=1}^{m} \mu(A_i \setminus B_i)} \geq \alpha - \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha}{2^{i+1}} \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} > 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}$. Daher gilt für alle $m \in \mathbb{N}$, dass $\bigcap_{n=1}^{m} K_n \supseteq \bigcap_{n=1}^{m} B_n \neq \emptyset$. Da $\mathcal{K}$ ein kompaktes Mengensystem ist, folgt $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$ und daher auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. $\square$

Beispiel 1.56: Sei λ der Lebesgue'sche Inhalt auf dem Ring $\mathcal{F}^k$ der k-dimensionalen Figuren, dann ist $\lambda(F) < \infty$ für alle $F \in \mathcal{F}^k$.
Sei $\mathcal{I}^k = \{(a, b] \subset \mathbb{R}^k \mid a, b \in \mathbb{R}^k\}$ das System der halboffenen Intervalle auf $\mathbb{R}^k$, dann hat jedes $F \in \mathcal{F}^k$ eine Darstellung der Form $F = \bigcup_{i=1}^r I_i$ mit disjunkten $I_i \in \mathcal{I}^k$.
Seien $J_i \subseteq K_i \subseteq I_i$ mit $J_i \in \mathcal{I}^k$, $K_i \in \mathcal{K}$ (kompakte Mengen im $\mathbb{R}^k$) mit $\lambda(I_i \setminus J_i) < \frac{\epsilon}{r}$. Dann ist $J := \bigcup_{i=1}^r J_i \in \mathcal{F}^k$, $K := \bigcup_{i=1}^k K_i \in \mathcal{K}$, und es gilt $\lambda(F \setminus J) = \sum_{i=1}^r \lambda(I_i \setminus J_i) < \epsilon$.
(Für $I = (a, b] \subset \mathbb{R}^k$ mit $a = (a_1, \ldots, a_k)$, $b = (b_1, \ldots, b_k)$ wähle $J = (a_\epsilon, b_\epsilon]$, $a_\epsilon = (a_1 + \frac{\sqrt[k]{\epsilon}}{4}, \ldots, a_k + \frac{\sqrt[k]{\epsilon}}{4})$, $b_\epsilon = (b_1 - \frac{\sqrt[k]{\epsilon}}{4}, \ldots, b_k - \frac{\sqrt[k]{\epsilon}}{4})$, dann ist $\lambda^k(I \setminus J) = \frac{\epsilon}{2^k} < \epsilon$; für K wähle z.B. $K = [a_\epsilon, b_\epsilon]$.)
Folglich ist λ kompakt approximierbar auf $\mathcal{F}^k$ durch das System der kompakten Mengen $\mathcal{K}$ in $\mathbb{R}^k$. Nach dem vorhergehenden Satz ist λ also ein Prämaß, das **Lebesgue'sche Prämaß auf $\mathcal{F}^k$**.

Definition 1.57 (Maß und Wahrscheinlichkeitsraum)

Jedes auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ von Ω definierte Prämaß μ heißt ein **Maß auf $\mathcal{A}$**. *Das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird* **Maßraum** *genannt.*
Gilt $\mu(\Omega) = 1$ (d.h. μ ist normiert), so wird μ ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** *genannt. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann* **Wahrscheinlichkeitsraum**.

Sei $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$. Das zentrale Resultat der Maßtheorie besagt, dass sich μ zu einem Maß $\bar{\mu}$ auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ fortsetzen lässt. Dazu konstruiert man zunächst ein sog. „äußeres Maß“ $\mu*$ auf $\mathcal{P}(\Omega)$ und zeigt dann, dass die Einschränkung $\bar{\mu}$ von μ^* auf das System $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*_{\mu^*}$ der μ^*-messbaren Mengen eine Maßfortsetzung von μ auf $\mathcal{A}^* \supseteq \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$ ist. Dazu benötigt man

Definition 1.58 (Äußeres Maß)

a) $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ *heißt* **äußeres Maß** *auf* Ω, *wenn*

1) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
2) *Für* $A_1, A_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$, $A_1 \subseteq A_2 \implies \mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$,
3) *Sei* $(A_n)_{n\geq 1}$ *Folge in* $\mathcal{P}(\Omega) \implies \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$.

b) $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ *heißt* $\boldsymbol{\mu^*}$**-messbar**, *wenn für alle* $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ *gilt*

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c).$$

Bemerkung: Für μ^*-messbare Mengen A gilt sogar $\mu^*(B) = \mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c)$, d.h. μ^* ist additiv auf Schnitten mit μ^*-messbaren Mengen.

Für $\mathcal{C} \subset \mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ bezeichnen wir mit

$$\mu|_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \mu|_{\mathcal{C}}(A) := \mu(A) \text{ für } A \in \mathcal{C}$$

die Restriktion von μ auf $\mathcal{C}$.

Der Grundstein für den späteren Maßerweiterungssatz liegt in

Satz 1.59

Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω und $\mathcal{A}^* := \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}$, dann gilt: $\mathcal{A}^*$ ist eine σ-Algebra, und $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}^*$.

Zum Beweis siehe Rüschendorf, S. 18, oder Elstrodt, S. 52f.

Satz 1.60 (Maßfortsetzungssatz von Carathéodory)

Sei $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Prämaß auf einem Ring $\mathcal{R}$.
Sei für $A \in \mathcal{P}(\Omega)$

$$\mathcal{U}(A) := \left\{ (A_n)_{n \geq 1} \text{ Folge in } \mathcal{R} \text{ mit } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}$$

das System der Überdeckungen von A und

$$\mu^*(A) := \begin{cases} \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n\geq 1} \in \mathcal{U}(A)\right\}, & \text{falls } \mathcal{U}(A) \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ein Maß mit $\mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$, d.h. $\bar{\mu} = \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ist eine **Maßfortsetzung** *von μ auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$.*

Zum Beweis siehe Rüschendorf, S. 19f, oder Elstrodt, S. 53f.

Bemerkung: 1.61: Da $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}^*$, gilt $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^*$. Frage: Um wieviel größer ist $\mathcal{A}^*$ im Vergleich zu $\mathcal{A}$?
Für σ-endliches μ (s. Definition 1.62) gilt:
$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}_\mu$ ist die $\boldsymbol{\mu}$**-Vervollständigung von $\boldsymbol{\mathcal{A}}$**, d.h. mit

$$\mathcal{N}_\mu := \{B \subset \Omega \mid \exists\, A \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(A) = 0 \text{ und } B \subseteq A\},$$

dem System der Teilmengen von μ-Nullmengen, gilt (s. Sätze 1.70 und 1.71)

$$\mathcal{A}_\mu = \sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{N}_\mu) =: \mathcal{A} \vee \mathcal{N}_\mu.$$

Die Konstruktion im Maßfortsetzungssatz liefert eine mögliche Fortsetzung eines Prämaßes zu einem Maß, jedoch macht der Satz keine Aussage darüber, ob diese Fortsetzung eindeutig ist oder es noch weitere Möglichkeiten der Fortsetzung gibt. Zur Klärung der Eindeutigkeitsfrage benötigt man

Definition 1.62 (σ-endliches Maß)

Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mu : \mathcal{E} \to \overline{\mathbb{R}}_+$, dann heißt μ $\boldsymbol{\sigma}$**-endlich** *(auf $\mathcal{E}$) genau dann, wenn eine aufsteigende Folge $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ existiert, so dass $\mu(E_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 1.63: Ist μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$, so ist μ σ-endlich genau dann, wenn es eine paarweise disjunkte Folge $(B_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}$ gibt, so dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ und $\mu(B_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Die Eigenschaft folgt sofort aus Definition 1.62, wenn man $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$ setzt; umgekehrt kann man eine passende Folge $(E_n)_{n\geq 1}$ durch $E_n := \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ erhalten.

Satz 1.64 (Eindeutigkeitssatz für Maße)

Seien μ_1, μ_2 Maße auf einem Messraum $(\Omega, \mathcal{A})$ sowie $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}$ derart, dass

a) $\mu_1|_{\mathcal{E}} = \mu_2|_{\mathcal{E}}$, *d.h.* $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ *für alle* $A \in \mathcal{E}$,

b) $\mu_1|_{\mathcal{E}}$ *(und damit auch* $\mu_2|_{\mathcal{E}}$*) ist* σ*-endlich auf* $\mathcal{E}$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis: Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$, dann definiere das System der „good sets“

$$\mathcal{D}_E := \{D \in \mathcal{A} \mid \mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)\}.$$

$\mathcal{D}_E$ ist ein Dynkin-System, denn

1) $\Omega \in \mathcal{D}_E$, denn $\mu_1(E \cap \Omega) = \mu_1(E) = \mu_2(E) = \mu_2(E \cap \Omega)$.

2) Für $A, B \in \mathcal{D}_E$ mit $A \subseteq B$ gilt

$$\begin{aligned} \mu_1(E \cap (B \setminus A)) &= \mu_1((E \cap B) \setminus (E \cap A)) = \mu_1(E \cap B) - \mu_1(E \cap A) \\ &= \mu_2(E \cap B) - \mu_2(E \cap A) = \mu_2(E \cap (B \setminus A)), \end{aligned}$$

also $B \setminus A \in \mathcal{D}_E$.

3) Analog zeigt man, dass für jede disjunkte Folge $(D_i)_{i\geq 1}$ in $\mathcal{D}_E$ auch $\bigcup_{i\geq 1} D_i \in \mathcal{D}_E$ gilt.

Da $\mathcal{E}$ n.V. $\cap$-stabil, gilt zudem $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$ und damit nach Satz 1.23 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$, also $\mathcal{A} = \mathcal{D}_E$.
Sei $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{E}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu_1(E_n) = \mu_2(E_n) < \infty$ für alle n, dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(A \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(A \cap E_n) = \mu_2(A). \qquad \square$$

Korollar 1.65 (Eindeutigkeit der Maßfortsetzung)

Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$, dann existiert genau eine Maßfortsetzung von μ auf $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{R})$, d.h. ex existiert genau ein Maß $\bar{\mu}$ auf $\mathcal{A}$ mit $\bar{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu$

Beweis: Nach Satz 1.60 ist $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ eine Maßfortsetzung von μ. Sei $\bar{\mu}$ eine weitere, dann gilt $\bar{\mu}|_{\mathcal{R}} = \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$ ist σ-endlich auf $\mathcal{R}$, also folgt aus Satz 1.64 $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})} = \bar{\mu}|_{\sigma(\mathcal{R})}$. $\square$

Folgerung und Definition 1.66: Es existiert genau ein Maß λ auf $\mathcal{B}^k$ mit

$$\lambda(I) = \lambda(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \quad \text{für } I = (a, b] \in \mathcal{E}_1.$$

λ heißt **Lebesgue-Borelsches Maß** auf $\mathcal{B}^k$.

Proposition 1.67 (Eigenschaften von λ)

a) *Sei $B \in \mathcal{B}^k$, $a \in \mathbb{R}^k$, dann ist $a + B = \{a + x \mid x \in B\} \in \mathcal{B}^k$.*

b) *λ ist translationsinvariant, d.h. für alle $a \in \mathbb{R}^k$ und $B \in \mathcal{B}^k$ ist $\lambda(a + B) = \lambda(A)$.*

c) *λ ist das einzige translationsinvariante Maß μ auf $\mathcal{B}^k$ mit $\mu((0, 1]) = 1$.*

d) *λ ist invariant bzgl. orthogonaler Transformationen, d.h. sei $B \in \mathcal{B}^k$ und O eine orthogonale Transformation in $\mathbb{R}^k$, so ist $O(B) \in \mathcal{B}^k$ und $\lambda(O(B)) = \lambda(B)$.*

e) *Sei $H \subset \mathbb{R}^k$ eine Hyperebene (d.h. ein affiner Unterraum mit $\dim H = k - 1$), dann ist $H \in \mathcal{B}^k$ und $\lambda(H) = 0$.*

Bemerkung: Nach dem Maßfortsetzungssatz von Carathéodory ist das zum Lebesgue'schen Prämaß auf $\mathcal{F}^k$ gehörige äußere Maß λ^* ein Maß auf der σ-Algebra $\mathcal{A}_{\lambda^*}$ der λ^*-messbaren Mengen

$$\mathcal{A}_{\lambda^*} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k) \mid \lambda^*(B) \geq \lambda^*(B \cap A) + \lambda^*(B \cap A^c) \text{ für alle } B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^k)\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{A}_{\lambda^*}$ heißen **Lebesgue-messbare Mengen des** $\mathbb{R}^k$ und das Maß $\lambda^*|_{\mathcal{A}_{\lambda^*}}$ heißt **Lebesgue-Maß auf** $\mathbb{R}^k$. Das Lebesgue-Borel'sche Maß ist dann die Einschränkung $\lambda^*|_{\mathcal{B}^k}$ des Lebesgue-Maßes auf die Borelmengen des $\mathbb{R}^k$.

Das Lebesgue-Maß ist die Vervollständigung des Lebesgue-Borel'schen Maßes im Sinne von

Definition 1.68 (Vollständiger Maßraum)

Ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *heißt* **vollständig**, *wenn jede Teilmenge einer* μ*-Nullmenge* $A \in \mathcal{A}$ *auch zu* $\mathcal{A}$ *gehört (und damit selbst eine* μ*-Nullmenge ist).*
Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *vollständig, nennt man auch* μ *vollständig.*

Bemerkung 1.69: Ist $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein äußeres Maß und $A \subset \Omega$ eine Menge, für die $\mu^*(A) = 0$ oder $\mu^*(A^c) = 0$ gilt, so ist A μ^*-messbar, d.h. $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.
Ist $\mu^*(A) = 0$, so gilt wegen der Monotonie und Positivität von μ^* für jedes $B \subset \Omega$, dass $\mu^*(B \cap A) = 0$ und daher

$$\mu^*(B \cap A) + \mu^*(B \cap A^c) = \mu^*(B \cap A^c) \leq \mu^*(B).$$

Für $\mu^*(A^c) = 0$ schließt man analog.
Falls $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(A) = 0$, so folgt wegen der Monotonie von μ^* für alle $B \subset A$, dass $\mu^*(B) = 0$ und damit auch $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Folglich ist $(\Omega, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu^*)$ ein vollständiger Maßraum.

Satz 1.70

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\mathcal{N}_\mu$ das System aller Teilmengen von μ-Nullmengen und $\tilde{\mathcal{A}} := \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}_\mu\}$ sowie

$$\tilde{\mu} : \tilde{\mathcal{A}} \to \overline{\mathbb{R}}_+, \qquad \tilde{\mu}(A \cup N) := \mu(A) \text{ für } A \in \mathcal{A},\ N \in \mathcal{N}_\mu.$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{A}}$ eine σ-Algebra, $\tilde{\mu}$ wohldefiniert und $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ ein vollständiger Maßraum.

Beweis: Übungsblatt 1 und 2 sowie Bemerkung 1.69.

Satz 1.71

Sei $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein σ-endliches Prämaß auf dem Ring $\mathcal{R}$ über Ω und μ^* das äußere Maß zu μ. Dann ist $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ die Vervollständigung von $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$.

Beweis: $\mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ist vollständig nach Bemerkung 1.69, also gilt $\mathcal{N}_{\mu^*} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ und daher $\widetilde{\sigma(\mathcal{R})} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$. Somit ist nur noch zu zeigen, dass $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$.

Sei $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ und zunächst $\mu^*(B) < \infty$. Dann gibt es nach Konstruktion des äußeren Maßes (vgl. Satz 1.60) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Überdeckung $(A_{nk})_{k\geq 1} \subset \mathcal{R}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \mu^*(B) + \frac{1}{n}$. Dann ist $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk} \in \sigma(\mathcal{R})$, $B \subseteq A$ und $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(B) + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\mu^*(A) = \mu^*(B)$.

Anwendung auf $A \setminus B$ anstelle von B ergibt, dass es ein $C \in \sigma(\mathcal{R})$ gibt mit $A \setminus B \subseteq C$ und $\mu^*(C) = \mu^*(A \setminus B) = \mu^*(A) - \mu^*(B) = 0$. Dann gilt

$$B = \underbrace{(A \setminus C)}_{\in \sigma(\mathcal{R})} \cup \underbrace{(B \cap C)}_{\in \mathcal{N}_{\mu^*}} \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})},$$

denn $B \cap C$ ist Teilmenge der $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$-Nullmenge C.

Sei nun $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ beliebig. Da μ σ-endlich, existiert $(E_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}$ mit $E_n \uparrow \Omega$ und $\mu(E_n) < \infty$ für alle n. Nach dem zuvor Bewiesenen gilt $B \cap E_n \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$ für alle n und damit $B \in \widetilde{\sigma(\mathcal{R})}$. $\square$

Bemerkung: Aus Korollar 1.65 und Satz 1.70 folgt dann direkt, dass auch die Fortsetzung von $\mu : \mathcal{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ zu einem Maß auf $\mathcal{A}_{\mu^*}$ eindeutig bestimmt ist.

Bemerkung: Nach der Konstruktion im Maßfortsetzungssatz 1.60 lässt sich das Maß einer messbaren Menge durch Approximation von außen durch abzählbar viele Ringelemente annähern. Eine entsprechende Approximation von innen durch Ringelemente ist i.A. nicht möglich: Betrachte $\mathcal{R} = \mathcal{F}^k$, $k = 1$, und $\mu = \lambda$ das Lebesgue'sche Prämaß auf $\mathcal{R}$. Sei $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ die Menge der irrationalen Zahlen und $R \in \mathcal{F}^1$ ein Ringelement mit $R \subseteq A$, so gilt $R = \emptyset$. Also gilt für das (analog dem äußeren) definierten innere Maß λ_* sowie das äußere Maß λ^*, dass $\lambda_*(A) = 0$, $\lambda^*(A) = \infty$.

Lässt man zur Approximation statt der Ringelemente allgemeiner Mengen aus der σ-Algebra zu, kann man auch von innen approximieren.

Definition 1.72 (Regularität von Maßen)

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein polnischer Raum und $\mathcal{B}(\mathcal{O})$ die von den offenen Mengen erzeugte Borel-σ-Algebra auf Ω, dann heißt ein Maß $\mu : \mathcal{B}(\mathcal{O}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$

a) *ein* **Borel-Maß** *auf Ω, falls $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subseteq \Omega$ gilt,*

b) **von innen regulär**, *wenn für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$ gilt*

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B,\ K \ \textit{kompakt}\},$$

c) **von außen regulär**, *wenn für jede Borel-Menge $B \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$ gilt*

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid B \subseteq O,\ O \ \textit{offen}\},$$

d) **regulär**, *wenn μ sowohl von innen als auch von außen regulär ist.*

Satz 1.73 (Ulam)

Jedes endliche Borel-Maß μ auf einem polnischen Raum Ω ist regulär.

Beweis: Betrachte das System $\mathcal{D}$ aller Mengen $B \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$, für die sowohl

$$\mu(B) = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq B,\ K \text{ kompakt}\} \tag{i}$$

als auch

$$\mu(B) = \inf\{\mu(O) \mid B \subseteq O,\ O \text{ offen}\} \tag{ii}$$

gilt. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist, das das System $\mathcal{F}$ aller abgeschlossenen Mengen in Ω enthält. Da $\mathcal{F}$ $\cap$-stabil ist, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathcal{O})$ nach Satz 1.23. Wegen $\mathcal{F} \subset \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{O})$ folgt $\mathcal{B}(\mathcal{O}) = \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{O})$, also ist $\mathcal{D} = \mathcal{B}(\mathcal{O})$, d.h. innere und äußere Regularität gelten für alle Borelmengen, somit ist μ regulär.

1. $\Omega \in \mathcal{D}$: Hierfür ist nur noch (i) nachzuweisen. Sei r die die Topologie $\mathcal{O}$ erzeugende Metrik und $(\omega_n)_{n\geq 1}$ eine dichte Teilmenge von Ω sowie $K_l(\omega) := \overline{B_l(\omega)}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt ω und Radius l. Für jedes $l > 0$ ist dann $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_l(\omega_n)$, und da μ als Maß von unten stetig ist, folgt

$$\mu(\Omega) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} K_l(\omega_i)\right).$$

Daher gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ein $k_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k_n} K_{1/n}(\omega_i)\right) \geq \mu(\Omega) - \epsilon 2^{-n}.$$

Jedes $B_n := \bigcup_{i=1}^{k_n} K_{1/n}(\omega_i)$ ist abgeschlossen, also auch $K := \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, und es gilt

$$\mu(\Omega) - \mu(K) = \mu(\Omega \backslash K) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\Omega \setminus B_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\Omega \backslash B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon 2^{-n} = \epsilon.$$

Wegen

$$K \subseteq B_n = K_{1/n}(\omega_1) \cup K_{1/n}(\omega_2) \cup \ldots \cup K_{1/n}(\omega_{k_n}) \quad \forall\, n$$

ist K präkompakt und abgeschlossen und daher nach Bemerkung 1.41 auch vollständig, also ist K nach Satz 1.45 b) kompakt. Damit gilt (i) für Ω.

2. Jede abgeschlossene Menge A liegt in $\mathcal{D}$: Nach 1. gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K mit $\mu(\Omega) - \mu(K) < \epsilon$. Es gilt aber (vgl. Proposition 1.50 a))

$$\mu(A) - \mu(A \cap K) = \mu(A \cup K) - \mu(K) \leq \mu(\Omega) - \mu(K) < \epsilon.$$

Damit gilt (i) für $B = A$, da A abgeschlossen und damit $A \cap K$ nach Korollar 1.46 kompakt ist.
Sei $r(\omega, A) := \inf\{r(\omega, \omega') \mid \omega' \in A\}$ der Abstand von $\omega \in \Omega$ zur Menge A und $G_n := \{\omega \in \Omega \mid r(\omega, A) < \frac{1}{n}\}$, dann ist $(G_n)_{n \geq 1}$ eine Folge offener Mengen mit $G_n \downarrow A$. Da μ endlich ist, folgt $\mu(G_n) \downarrow \mu(A)$, so dass für A auch (ii) gilt, also ist jede abgeschlossene Menge A in $\mathcal{D}$.

3. Mit $B \in \mathcal{D}$ liegt auch $B^c \in \mathcal{D}$: Für jede kompakte Menge $K \subseteq B$ gilt $\mu(K^c) - \mu(B^c) = \mu(B) - \mu(K)$. Erfüllt somit B Bedingung (i), erfüllt B^c die Bedingung (ii). Ist G offene Obermenge von B, so ist G^c abgeschlossene Teilmenge von B^c mit $\mu(B^c) - \mu(G^c) = \mu(G) - \mu(B)$, also erfüllt B^c (i), wenn man dort „kompakt“ durch „abgeschlossen“ ersetzt. Nach Teil 2. folgt dann aber, dass B^c auch Teil (i) erfüllen muss.

4. Ist $(D_n)_{n\geq 1}$ eine Folge disjunkter Mengen aus $\mathcal{D}$, gilt auch $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$: Wegen der σ-Additivität von μ gilt $\mu(D) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_n)$. Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert daher ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu(D) - \sum_{n=1}^{n_0} \mu(D_n) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Zu jedem D_i existiert eine kompakte Menge $K_i \subseteq D_i$ mit $\mu(D_i) - \mu(K_i) < \frac{\epsilon}{2n_0}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, n_0$. Dann ist aber $K := K_1 \cup \ldots \cup K_n$ eine kompakte Teilmenge von $D_1 \cup \ldots \cup D_n \subseteq D$ mit

$$\mu(D_1 \cup \ldots \cup D_n) - \mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n_0} (D_i \setminus K_i)\right) = \sum_{i=1}^{n_0} \mu(D_i \setminus K_i) < \frac{\epsilon}{2},$$

woraus mit der obigen Gleichung folgt $\mu(D) - \mu(K) < \epsilon$, also gilt (i) für D.

Analog gibt es zu jedem D_n eine offene Obermenge O_n mit $\mu(O_n) - \mu(D_n) < \frac{\epsilon}{2^n}$.

Dann ist aber $O := \bigcup_{n=1}^\infty O_n$ eine offene Obermenge von D mit

$$\mu(O) - \mu(D) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty (O_n \setminus D_n)\right) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(O_n \setminus D_n) < \epsilon,$$

also gilt auch (ii) für D. Damit gilt $D = \bigcup_{n=1}^\infty D_n \in \mathcal{D}$, also ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, dass das System der abgeschlossenen Mengen $\mathcal{F}$ in Ω enthält. □

Da das Lebesgue- bzw. das Lebesgue-Borel'sche Maß auf $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k)$ nicht endlich ist, ist für diese Satz 1.73 nicht anwendbar. Die Regularität des Lebesgue(-Borel'schen) Maßes ergibt sich aber umgehend aus

Proposition 1.74

Sei $(\Omega, \mathcal{O})$ ein polnischer Raum und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{O}))$. Existiert eine abzählbare offene Überdeckung $(O_i)_{i\geq 1} \subset \mathcal{O}$ von Ω, d.h. $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty O_i$, für die gilt $\mu(O_i) < \infty$ für alle $i \geq 1$, dann ist μ regulär.

Beweis: Für $G_n := \bigcup_{i=1}^n O_i$, gilt $G_n \uparrow \Omega$ und $\mu(G_n) \leq \sum_{i=1}^n \mu(O_i) < \infty$, daher wird für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$ durch $\mu_n(A) := \mu(A \cap G_n)$ ein endliches Borel-Maß auf $(\Omega, \mathcal{B}(\mathcal{O}))$ definiert, das nach Satz 1.73 von innen regulär ist. Daher gilt für beliebiges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{O})$

$$\mu(A) = \sup_{n \geq 1} \mu(A \cap G_n) = \sup_{n \geq 1} \mu_n(A) = \sup_{n \geq 1} \sup_{K \subseteq A \text{ komp.}} \mu_n(K)$$
$$= \sup_{K \subseteq A \text{ komp.}} \sup_{n \geq 1} \mu_n(K) = \sup_{K \subseteq A \text{ komp.}} \mu(K),$$

also ist μ von innen regulär. (μ selbst ist auch ein Borel-Maß, da jedes kompakte $K \subseteq \Omega$ sich durch nur endlich viele der O_i überdecken lassen und somit $\mu(K) < \infty$ gelten muss.)
Da μ_n nach Satz 1.73 ebenso von außen regulär ist, existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Menge U_n mit $(A \cap G_n) \subseteq U_n \subseteq G_n$ und $\mu_n(U_n \setminus (A \cap G_n)) = \mu(U_n \setminus (A \cap G_n)) < \frac{\epsilon}{2^n}$. Dann ist $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ offen, $A \subseteq U$ und $\mu(U \setminus A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus (A \cap G_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon$, woraus die äußere Regularität von μ folgt. $\square$

Bemerkung: Für das Lebesgue-Borel'sche Maß auf $\mathbb{R}^k$ bilden z.B. die offenen Kugeln $B_1(z)$ mit $z \in \mathbb{Z}^k$ eine abzählbare Überdeckung von $\mathbb{R}^k$ mit den in Proposition 1.74 geforderten Eigenschaften, also ist das Lebesgue-Borel'sche Maß regulär. (Dabei spielt es keine Rolle, bzgl. welcher die Metrik induzierender Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ die offenen Kugeln definiert sind, da auf dem $\mathbb{R}^k$ alle Normen äquivalent sind und damit die offenen Mengen bzgl. jeder Norm die gleichen sind.)

Nach soviel allgemeiner Theorie wollen wir uns noch kurz den (Wahrscheinlichkeits-)Maßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ genauer zuwenden.

Definition 1.75 (Verteilungsfunktion)

Eine Abbildung $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ heißt **Verteilungsfunktion** *auf $\mathbb{R}$, falls*

i) *F ist monoton wachsend (d.h. $F(x) \leq F(y)$ für $x \leq y$),*

ii) *F ist rechtsseitig stetig,*

iii) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.

$M^1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ sei die Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{V} = \mathcal{V}^1$ die Menge der Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}^1$

Satz 1.76 (Korrespondenzsatz)

1) *Sei $P \in M^1(\mathbb{R}.\mathcal{B})$, dann ist $F_P : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $F_P(x) := P((-\infty, x])$ eine Verteilungsfunktion, d.h. $F_P \in \mathcal{V}$.*

2) *Sei $F \in \mathcal{V}$, dann existiert genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P \in M^1(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, so dass $F = F_P$.*

3) *Die Abbildung $M^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}) \to \mathcal{V}$, $P \mapsto F_P$, ist bijektiv.*

Beweis:

1) Wegen der Monotonieeigenschaft für Maße folgt für $x \leq y$, dass $F_P(x) = P((-\infty, x]) \leq P((-\infty, y]) = F_P(y)$, also ist F_P monoton wachsend.

   Sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit $x_n \downarrow x$, dann folgt aus dem Stetigkeitssatz für (Prä)Maße (Satz 1.53, Stetigkeit von oben), dass $F_P(x_n) = P((-\infty, x_n]) \downarrow P((-\infty, x]) = F_P(x)$, somit ist F_P auch rechtsseitig stetig.

   Mit Stetigkeit von unten folgt für eine Folge mit $x_n \uparrow \infty$, dass $F_P(x_n) = P((-\infty, x_n]) \uparrow P(\mathbb{R}^1) = 1$, und mit der Stetigkeit an der leeren Menge folgt für $x_n \downarrow -\infty$, dass $F_P(x_n) = P((-\infty, x_N]) \downarrow P(\emptyset) = 0$.

2) **Existenz:** Definiere für $I = (a, b]$, $a < b$, $P((a, b]) := F(b) - F(a)$. Sei $A := \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i] \in \mathcal{F}^1$ eine Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle (d.h. eine eindimensionale Figur), so definiere

$$P(A) := \sum_{i=1}^{n} \big(F(b_i) - F(a_i)\big)$$

Dann zeigt man analog der Konstruktion des Lebesgue-Borel'schen Maßes leicht, dass P auf $\mathcal{F}^1$ ein wohldefinierter Inhalt ist, der kompakt approximierbar, also sogar ein Prämaß ist. Nach dem Maßfortsetzungssatz 1.60 existiert daher eine Fortsetzung von P auf $\sigma(\mathcal{F}^1) = \mathcal{B}^1$, für die nach Definition von P gilt $P((-\infty, x]) = F(x) - F(-\infty) = F(x)$, also ist $F = F_P$.

Eindeutigkeit: Da $\mathcal{E}_3 = \{(-\infty, b] \mid b \in \mathbb{R}\}$ nach Bemerkung 1.15 ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B}^1$ ist und $(-\infty, n] \uparrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ mit $P((-\infty, n]) \leq 1 < \infty$, folgt die Eindeutigkeit aus dem Eindeutigkeitssatz 1.64 (bzw. Korollar 1.65).

3) folgt direkt aus 1) und 2) $\square$

Analog lassen sich auch die σ-endlichen Maße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ charakterisieren:

Proposition 1.77

Eine Funktion $\mu : \mathcal{B}^1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ist genau dann ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wenn es eine monoton wachsende, rechtsseitig stetige Funktion $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$\mu((a, b]) = G(b) - G(a) \qquad (*)$$

für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Ist $\tilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, die $(*)$ erfüllt, so gilt $\tilde{G}(x) = G(x) + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Beweis: $\Rightarrow$: Sei μ σ-endliches Maß auf $(\mathcal{R}, \mathcal{B})$, dann definiere $G(0) := 0$, sowie $G(x) := \mu((0, x])$ für $x > 0$ und $G(x) := -\mu((x, 0])$ für $x < 0$, dann folgt analog Satz 1.76 1), dass G monoton wachsend und rechtsseitig stetig ist, sowie (z.B. für $0 < a < b$) $\mu((a, b]) = \mu((0, b]) - \mu((0, a]) = G(b) - G(a)$ (die Fälle $a < b \leq 0$ und $a < 0 < b$ folgen analog).

$\Leftarrow$: Wie im Beweis des Korrespondenzsatzes 1.76 zeigt man, dass durch $\mu((a, b]) := G(b) - G(a)$ ein Prämaß auf $\mathcal{F}^1$ definiert wird, dass sich zu einem eindeutigen Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ fortsetzen lässt (die σ-Endlichkeit folgt dabei aus der Endlichkeit von G, da $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ angenommen wurde). Sei $\tilde{G} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, für die $\mu((a, b]) = \tilde{G}(b) - \tilde{G}(a)$ gilt für alle $a < b \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\tilde{G}(b) = \tilde{G}(a) + \mu((a, b]) = G(b) + \tilde{G}(a) - G(a),$$

woraus die Behauptung mit $c = \tilde{G}(a) - G(a)$ folgt. $\square$

Mit Hilfe messbarer Abbildungen können Maße von einem Raum auf einen anderen übertragen werden.

Proposition 1.78 (Bildmaße)

Sei $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu)$ *ein Maßraum und* $X : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ *eine messbare Abbildung, so definiere*

$$\mu^X : \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \mu^X(A_2) := \mu(X^{-1}(A_2)) \, \forall \, A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Dann ist μ^X *ein Maß auf* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$*.* μ^X *heißt* **Bildmaß von μ unter X***.*

Beweis: Wegen $X^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ ist $\mu^X(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
Sei $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_2$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen, so ist auch $(X^{-1}(A_n))_{n \geq 1} \subset \mathcal{A}_1$ paarweise disjunkt, so dass

$$\begin{aligned} \mu^X\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \mu\left(X^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}(A_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(X^{-1}(A_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^X(A_n). \end{aligned} \qquad \square$$

Beispiel 1.79:

a) Für $a \in \mathbb{R}^k$ bezeichne $T_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, $x \mapsto x + a$ die Translation um a. Dann folgt $(\lambda^k)^{T_a} = \lambda^k$. Dies ist äquivalent zur Aussage der Translationsinvarianz des Lebesgue-Borel'schen Maßes (vgl. Proposition 1.67 b)).

b) Für jede lineare Abbildung $T \in GL(\mathbb{R}^k)$ gilt $(\lambda^k)^T = \frac{1}{|\det(T)|}\lambda^k$ oder äquivalent $\lambda^k(T(A)) = |\det(T)|\,\lambda^k(A)$ für alle $A \in \mathcal{B}^k$.

c) Sei μ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit zugehöriger Funktion G nach Proposition 1.77, und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton wachsende Funktion. Dann ist die nach Proposition 1.77 zum Bildmaß μ^h gehörige Funktion G_h gegeben durch $G_h = G \circ h^{-1}$, d.h. $G_h(x) = G(h^{-1}(x))$.

(Die Messbarkeit von h folgt unmittelbar aus Proposition 1.27 b), da die Urbilder von halboffenen Intervallen $(a, b]$ wegen der Monotonie von h wiederum Intervalle sind und damit in $\mathcal{B}$ liegen.)

1.4 Integrationstheorie

Im Folgenden sei $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und

$$\overline{\mathcal{B}} := \overline{\mathcal{B}^1} = \{B,\ B \cup \{\infty\}, B \cup \{-\infty\}, B \cup \{-\infty, \infty\} \mid B \in \mathcal{B}^1\}$$

die Borel'sche σ-Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$.

Eine numerische Funktion ist eine Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$. Ist $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, so heißt f **numerische, $\mathcal{A}$-messbare Funktion**, wenn $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})$ messbar ist.

Für $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ sei $\{f \leq g\} := \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\}$, analog seien $\{f > g\}$, $\{f \neq g\}$ usw. definiert.

Proposition 1.80 (Eigenschaften messbarer Funktionen)

a) $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ *ist* $\mathcal{A}$*-messbar*
$$\begin{aligned} &\iff \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \{f > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \\ &\iff \{f < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Proposition 1.80 (Forts.)

b) *Seien* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$*-messbar, dann sind* $\{f \leq g\}$, $\{f < g\}$, $\{f = g\}$, $\{f \neq g\}$ *Elemente von* $\mathcal{A}$.

c) *Seien* $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathcal{A}$*-messbar und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *dann ist auch* $\alpha f + \beta g$ $\mathcal{A}$*-messbar, sofern wohldefiniert. Insbesondere ist* $f \pm g$ $\mathcal{A}$*-messbar, falls auf ganz* Ω *definiert.*

d) $|f|$ *sowie* $f \cdot g$ *ist* $\mathcal{A}$*- messbar (zu Letzterem definiere* $\infty \cdot x = \operatorname{sgn}(x) \cdot \infty$ *für* $x \neq 0$ *und* $\infty \cdot 0 = 0$*).*

e) *Sei* $(f_n)_{n \geq 1}$ *eine Folge* $\mathcal{A}$*-messbarer Funktionen, dann sind auch die folgenden Funktionen* $\mathcal{A}$*-messbar:* $\sup_{n \geq 1} f_n$, $\inf_{n \geq 1} f_n$, $\limsup_{n \to \infty} f_n$, $\liminf_{n \to \infty} f_n$, $\sup\{f_1, \ldots, f_m\}$, $\inf\{f_1, \ldots, f_m\}$ *(sowie* $\lim_{n \to \infty} f_n$, *sofern die Folge punktweise konvergiert).*

Beweisskizze:

a) $\{f \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty])$. Zeige, dass $\overline{\mathcal{E}} = \{[\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein Erzeugendensystem von $\overline{\mathcal{B}}$ ist, dann folgt die Aussage aus Proposition 1.27 b).

Die anderen Äquivalenzen folgen dann wegen
$\{f > \alpha\} = \bigcup_{n\geq 1}\{f \geq \alpha + \frac{1}{n}\}$, $\{f \leq \alpha\} = \{f > \alpha\}^c$,
$\{f < \alpha\} = \bigcup_{n\geq 1}\{f \leq \alpha - \frac{1}{n}\}$.

b) $\{f < g\} \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{f < q\} \cap \{q < g\} \in \mathcal{A}$, $\{f \leq g\} = \{g < f\}^c$,
$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\}$, $\{f \neq g\} = \{f = g\}^c$.

c) – d) Siehe (wie ergänzend auch zum Übrigen) Elstrodt, S. 105–107.

e) $\{\sup_{n\geq 1} f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n\geq 1}\{f_n \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$, $\inf_{n\geq 1} f_n = -\sup_{n\geq 1}(-f_n)$.
$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \underbrace{\sup_{m\geq n} f_m}_{=:g_n} = \inf_{n\geq 1} g_n$ ist $\mathcal{A}$-messbar.

$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \underbrace{\inf_{m\geq n} f_m}_{=:h_n} = \sup_{n\geq 1} h_n$ ist $\mathcal{A}$-messbar.

Falls die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise konvergiert, gilt
$\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n$.
$\sup\{f_1, \ldots, f_m\} = \sup\{f_1, \ldots, f_m, f_m, f_m, \ldots\}$, analog folgt die Messbarkeit von $\inf\{f_1, \ldots, f_m\}$ $\square$

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, dann heißen

$$\mathcal{Z} := \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})\} \text{ messbare, reelle Funktionen,}$$

$$\overline{\mathcal{Z}} := \{f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}})\} \text{ messbare, numerische Funktionen,}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &:= \{f \in \mathcal{Z} \mid |f(\Omega)| < \infty\} \\ &= \left\{ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \,\middle|\, (A_i)_{1 \le i \le n} \subset \mathcal{A} \text{ messbare Zerlegung von } \Omega \right\}\end{aligned}$$

die Menge der **Elementarfunktionen**. Beachte, dass $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ für $f \in \mathcal{E}$ und $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$.

Weiter seien $\mathcal{Z}_+ := \{f \in \mathcal{Z} \mid f \geq 0\}$ und analog $\overline{\mathcal{Z}}_+$ und $\mathcal{E}_+$ definiert.

Satz 1.81 (Darstellungssatz)

a) $f \in \overline{\mathcal{Z}} \Rightarrow \exists\, (f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ *mit* $|f_1| \leq |f_2| \leq \dots$ *und* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,\forall\, x \in \Omega$.

b) $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+ \Rightarrow \exists\, (f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}_+$ *mit* $f_n \uparrow f$.

c) $f \in \mathcal{Z}$, $\sup_\Omega |f(x)| < \infty \Rightarrow \exists\, (f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} \sup_{x \in \Omega} |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Beweis:

b) Sei $A_{n,k} := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\}$ für $1 \leq k \leq n2^n$, und $B_n := \{f \geq n\}$, dann bilden die $(A_{n,k})$ und B_n eine Zerlegung von Ω.

Setze $f_n := \sum_{k=1}^{2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_{n,k}} + n \mathbb{1}_{B_n}$, dann gilt $f_n \uparrow f$ und $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ für $x \in B_n^c$.

a) und c) Zerlege $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ in $f = f^+ - f^-$ mit $f^+ = \sup(f, 0)$ (Positivteil von f) und $f^- = (-f)^+ = \sup(-f, 0)$ (Negativteil von f). Anwendung von Teil b) auf f^+ und f^- ergibt die Behauptung von a). Die gleichmäßige Konvergenz in c) folgt aus der Beschränktheit von f.

$\square$

Definition des Integrals

Für messbare, numerische Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ wird das Integral $\int f \, d\mu$ in drei Schritten definiert: Zunächst für Elementarfunktionen, dann für nicht-negative numerische Funktionen und zuletzt für allgemeine numerische Funktionen.

Das Integral für nicht-negative Elementarfunktionen

Für $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{E}_+$ definiere das Integral durch

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^m \alpha_i \, \mu(A_i).$$

Dann lassen sich folgende Eigenschaften einfach verifizieren:

1. $\int \mathbb{1}_A \, d\mu = \mu(A)$.
2. $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{E}_+$, $\alpha \geq 0$.
3. $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ für alle $f, g \in \mathcal{E}_+$.
4. Für alle $f, g \in \mathcal{E}_+$ mit $f \leq g$ gilt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
5. Seien $(f_n)_{n \geq 1}, (g_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}_+$ mit $f_n \uparrow$, $g_n \uparrow$ und $\sup_{n \geq 1} f_n = \sup_{n \geq 1} g_n$, dann ist $\sup_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu = \sup_{n \geq} \int g_n \, d\mu$.

Das Integral für nicht-negative numerische Funktionen

Sei $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$, so existiert nach Satz 1.81 b) eine Folge $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}_+$ mit $f_n \uparrow f$. Definiere

$$\int f \, d\mu := \sup_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu.$$

Dann gilt

1. $\int f \, d\mu$ ist wohldefiniert, d.h. unabhängig von der speziellen Wahl der Folge $(f_n)_{n\geq 1}$.
2. Die Abbildung $f \mapsto \int f \, d\mu$ setzt das auf den Elementarfunktionen definierte Integral fort.
3. $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$ für alle $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$, $\alpha \geq 0$.
4. $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$ für alle $f, g \in \overline{\mathcal{Z}}_+$.
5. Für alle $f, g \in \overline{\mathcal{Z}}_+$ mit $f \leq g$ gilt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.

Das Integral für messbare, numerische Funktionen
Zerlege $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ in $f = f^+ - f^-$. f heißt **μ-integrierbar**, falls $\int f^+ \, d\mu < \infty$ und $\int f^- \, d\mu < \infty$. Für μ-integrierbare f definiere

$$\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu.$$

$\mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichne die Menge der μ-integrierbaren Funktionen.

Es gelten die folgenden Eigenschaften:

1. Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist auch $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (sofern $\alpha f + \beta g$ auf ganz Ω definiert ist) und $\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f \, d\mu + \beta \int g \, d\mu$ für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
2. Für alle $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \leq g$ gilt $\int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$.
3. Falls $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$, gilt auch $\sup(f, g)$, $\int(f, g) \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
4. $|\int f \, d\mu| \leq \int |f| \, d\mu$ für alle $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Bemerkung 1.82: $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ ist genau dann integrierbar, wenn $\int |f| \, d\mu < \infty$.
$\Rightarrow$: $\int |f| \, d\mu = \int (f^+ + f^-) \, d\mu = \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu < \infty$, denn beide Summanden sind $< \infty$, da f integrierbar.
$\Leftarrow$: Wegen $f^\pm \leq |f|$ gilt $\int f^\pm \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu < \infty$ nach 2.

$f \in \overline{\mathcal{Z}}$ wird **quasi-integrierbar** genannt, falls entweder $\int f^+ \, d\mu < \infty$ oder $\int f^- \, d\mu < \infty$. Für ein quasi-integrierbares $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ ist somit der Wert des Integrals $\int f \, d\mu$ immer noch wohldefiniert, kann jedoch auch die Werte ∞ oder $-\infty$ annehmen.

Satz 1.83 (monotone Konvergenz, B. Levi)

Sei $(f_n)_{n\geq 1} \uparrow\subset \overline{\mathcal{Z}}_+$ *eine aufsteigende Folge nicht-negativer numerischer Funktionen, dann gilt*

$$\int \sup_{n\geq 1} f_n \, d\mu = \sup_{n\geq 1} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis: Siehe z.B. Elstrodt, S. 125.

Lemma 1.84 (Fatou)

Sei $(f_n)_{n\geq 1} \subset \overline{\mathcal{Z}}_+$ *eine Folge nicht-negativer, numerischer Funktionen, dann gilt*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis: Siehe Elstrodt, S. 144/145.

Korollar 1.85

a) *Sei* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \overline{\mathcal{Z}}_+$ *eine Folge nicht-negativer, numerischer Funktionen, dann gilt*

$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int f_n \, d\mu.$$

b) *Für jede Folge* $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{A}$ *gilt* $\mu(\liminf_{n\geq 1} A_n) \leq \liminf_{n\geq 1} \mu(A_n)$. *Ist* $\mu(\Omega) < \infty$, *gilt auch* $\mu(\limsup_{n\geq 1} A_n) \geq \limsup_{n\geq 1} \mu(A_n)$.

Beweis:

a) Folgt mit $g_m = \sum_{n=1}^{m} f_n \uparrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ direkt aus dem Satz von Levi.

b) Sei $f_n = \mathbb{1}_{A_n}$, dann ist $\liminf_{n\to\infty} f_n = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, und aus dem Lemma von Fatou folgt

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) = \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt

$$\begin{aligned}\mu(\Omega) - \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) &= \mu((\limsup_{n\to\infty} A_n)^c) = \mu\left(\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n} A_m\right)^c\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{m\geq n} A_m^c\right) = \mu(\liminf A_n^c) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n^c) = \liminf_{n\to\infty}\big(\mu(\Omega) - \mu(A_n)\big) \\ &= \mu(\Omega) - \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \qquad \square\end{aligned}$$

Definition 1.86

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$. Dann wird durch $(f\mu)(A) := \int_A f\, d\mu$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ definiert. $f\mu$ heißt das **Maß mit der Dichte f***.*
Falls $\int f\, d\mu = 1$, ist $f\mu$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und f heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte***.*

Bemerkung: Nach Definition ist $f\mu$ zunächst nur eine Abbildung von $\mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$. Für die behauptete Maßeigenschaft ist noch die σ-Additivität zu zeigen: Sei $(A_n)_{n\geq 1}$ eine paarweise disjunkte Folge in $\mathcal{A}$, so ist

$$f\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \int \mathbb{1}_{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} f\,d\mu = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_n}\right) f\,d\mu$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int \mathbb{1}_{A_n} f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f\mu(A_n).$$

Für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ haben wir bereits früher (vgl. Bemerkung 1.61 und Sätze 1.70 bzw. 1.71) die **μ-Nullmengen** definiert als diejenigen $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$. Daraus ergibt sich

Definition 1.87

Seien $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar, so sagt man $f = g$ ***μ-fast überall*** *(Schreibweise: $f = g\ [\mu]$), falls $\mu(\{f \neq g\}) = 0$.*

Allgemeiner sagt man: Eine Eigenschaft E gilt μ-fast überall, falls eine μ-Nullmenge N existiert, so dass E für alle $\omega \in N^c$ gilt.
Ist μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß, sagen wir, dass E μ-fast sicher gilt.

Bemerkung: Man kann auch (evtl. nicht messbare) Teilmengen von μ-Nullmengen als Nullmengen bezeichnen. Dann muss die Menge $B_E := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ erfüllt Eigenschaft } E\}$ nicht zwingend messbar sein, für „E gilt $[\mu]$“ genügt dann, dass B_E^c Teilmenge eine μ-Nullmenge ist.

Proposition 1.88

a) *Ist $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$ eine nicht-negative numerische Funktion, dann gilt:* $\int f \, d\mu = 0 \iff f = 0 \; [\mu]$.

b) *Für $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+$ und $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ ist $\int_N f \, d\mu = 0$ („Integrale über Nullmengen sind Null").*

c) *Sind $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f \leq g \; [\mu]$ und $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$, dann gilt $f = g \; [\mu]$.*

d) *Ist $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ integrierbar, gilt $|f| < \infty \; [\mu]$, d.h. f ist μ-fast überall endlich.*

e) *Für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt: $f \leq g \; [\mu] \iff \int_A f \, d\mu \leq \int_A g \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$.*

Beweis:

a) „$\Rightarrow$": Aus der Ungleichung

$$\frac{1}{n} \mu\left(\left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right) = \frac{1}{n} \int \mathbb{1}_{\{f > \frac{1}{n}\}} \, d\mu \leq \int \mathbb{1}_{\{f > \frac{1}{n}\}} f \, d\mu \leq \int f \, d\mu = 0$$

folgt $\mu(\{f > \frac{1}{n}\}) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da f nicht-negativ, folgt $\{f > \frac{1}{n}\} \uparrow \{f \neq 0\}$ und damit aus der Stetigkeit von unten $\mu(\{f \neq 0\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\{f > \frac{1}{n}\}) = 0$, also ist $f = 0\ [\mu]$.

„$\Leftarrow$“: Sei $f = 0\,[\mu]$, dann ist $N := \{f \neq 0\}$ eine μ-Nullmenge. Setze $f_n := n\mathbb{1}_N$ und beachte, dass $0 \le f \le \sup_{n\ge 1} f_n$. Dann folgt aus dem Satz von Levi

$$0 \le \int f\, d\mu \le \int \sup_{n\ge 1} f_n\, d\mu = \sup_{n\ge 1} \int f_n\, d\mu = \sup_{n\ge 1} n\,\mu(N) = 0,$$

also ist $\int f\, d\mu = 0$.

b) $\int_N f\, d\mu = \int (f\,\mathbb{1}_N)\, d\mu = 0$ nach a), da $f\,\mathbb{1}_N = 0\ [\mu]$.

c) N.V. gilt $g - f \ge 0\ [\mu]$ und $\int f\, d\mu = \int g\, d\mu$, also $\int (g-f)\, d\mu = 0$. Damit folgt aus Teil a) $g - f = 0\ [\mu]$, also $f = g\ [\mu]$.

d) Sei $M : \{|f| = \infty\}$, dann gilt $\alpha\mathbb{1}_M \le |f|$ für alle $\alpha > 0$ und daher

$$\alpha\,\mu(M) = \int \alpha\mathbb{1}_M\, d\mu \le \int |f|\, d\mu < \infty,$$

also auch $\lim_{\alpha\to\infty} \alpha\,\mu(M) < \infty$, folglich muss $\mu(M) = 0$ sein.

e) „$\Rightarrow$“: Wegen $f \leq g\ [\mu]$ folgt $(f-g)^+ = 0\ [\mu]$, also gilt nach Teil a) $\int (f-g)^+ \, d\mu = 0$. Wegen $\mathbb{1}_A(f-g) \leq (f-g)^+$ gilt

$$\int_A f \, d\mu - \int_A g \, d\mu = \int_A (f-g) \, d\mu \leq \int (f-g)^+ \, d\mu = 0,$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

„$\Leftarrow$“: Setze $A := \{f - g > 0\} \in \mathcal{A}$, dann ist

$$0 \leq \int (f-g)^+ \, d\mu = \int_A (f-g) \, d\mu \underset{\text{Vor.}}{\leq} 0,$$

also gilt nach Teil a) $(f-g)^+ = 0\ [\mu]$ und damit $f \leq g\ [\mu]$. $\square$

Bemerkung 1.89: Da $f = g\ [\mu]$ äquivalent ist zu $f \leq g\ [\mu]$ und $f \geq g\ [\mu]$, folgt aus Teil e) (mit $A = \Omega$), dass für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ mit $f = g\ [\mu]$ gilt $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.
Das bedeutet insbesondere, dass man eine integrierbare Funktion f auf einer μ-Nullmenge beliebig verändern darf, ohne dass sich der Wert des Integrals $\int f \, d\mu$ ändert.

Satz 1.90 (majorisierte Konvergenz (Lebesgue))

Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Folge in $\overline{\mathcal{Z}}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f \in \overline{\mathcal{Z}}$ $[\mu]$, $|f_n| \leq g$ $[\mu]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Dann sind alle f_n sowie f integrierbar, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \textit{sowie} \qquad \lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0.$$

Beweis: Wegen $|f_n| \leq g$ $[\mu]$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt nach Proposition 1.88 e) (mit $A = \Omega$), dass $\int |f_n| \, d\mu \leq \int g \, d\mu < \infty$, also sind alle f_n integrierbar nach Bemerkung 1.82. Wegen $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ $[\mu]$ und $|f_n| \leq g$ $[\mu]$ für alle n gilt $|f| \leq g$ $[\mu]$, daher ist auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
(Beachte, dass $N_n := \{|f_n| > g\}$ eine μ-Nullmenge für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, also ist wegen der Subadditivität von μ auch $N := \bigcup_{n\geq 1} N_n$ eine μ-Nullmenge. Ferner ist $M := \{f_n \underset{n\to\infty}{\not\to} f\}$ nach Voraussetzung eine μ-Nullmenge und daher auch $\{f > g\}$, denn $\{f > g\} \subseteq M \cup N$.)
Somit ist $g_n := |f| + g - |f_n - f| \geq 0$ $[\mu]$, und wegen Bemerkung 1.89 kann man o.B.d.A. annehmen, dass $g_n(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Wegen $g_n \uparrow |f| + g$ folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\int (|f| + g)\, d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} g_n\, d\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu$$
$$= \int (|f| + g)\, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu$$

Wegen der Integrierbarkeit von f und g ist $\int (|f| + g)\, d\mu < \infty$, daher ergibt obige Ungleichung $0 \le -\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu$, also $\limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$ und daher auch $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$. Wegen

$$\left| \int f_n\, d\mu - \int f\, d\mu \right| = \left| \int f_n - f\, d\mu \right| \le \int |f_n - f|\, d\mu$$

folgt dann auch $\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$. □

Bemerkung 1.91: Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$, dann ist jede abzählbare Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge, d.h. $\lambda(A) = 0$: Sei $x \in \mathbb{R}$ und $(x_n)_{n\ge1}$ eine Folge mit $x_n \downarrow x$, so gilt wegen der Stetigkeit von oben $\lambda(\{x\}) = \lim_{n\to\infty} \lambda([x, x_n]) = \lim_{n\to\infty} x_n - x = 0$, und aus der σ-Additivität von λ folgt dann die Behauptung.

Folglich kann man nach Bemerkung 1.89 Lebesgue-integrierbare Funktionen $f \in \mathcal{L}^1(\lambda)$ an abzählbar vielen Stellen verändern, ohne dass sich der Wert des Lebesgue-Integrals $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda$ ändert. Bei dem Riemann-Integral $\int_{\mathbb{R}} f \, dx$ dagegen darf f nur an endlich vielen Stellen modifiziert werden, ohne den Wert des Integrals zu ändern.
Da insbesondere $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, gilt $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, d\lambda = 0$, das Riemann-Integral $\int \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} \, dx$ dagegen ist gar nicht definiert.

Satz 1.92

a) *Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (mit $a, b \in \mathbb{R}^k$, $a < b$) ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen eine λ^k-Nullmenge ist. In diesem Fall stimmt das Riemann-Integral von f mit dem Lebesgue-Integral überein.*

b) *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar über jedes kompakte Teilintervall von I, so ist f genau dann Lebesgue-integrierbar über I, wenn $|f|$ uneigentlich Riemann-integrierbar über I ist, und dann stimmt das uneigentliche Riemann-Integral von f über I mit dem Lebesgue-Integral überein.*

Beweis: Siehe Elstrodt, S. 151–154.

Definition 1.93

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *ein Maßraum und* $0 < p < \infty$, *dann heißt*

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \{f \in \overline{\mathcal{Z}} \mid |f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)\}$$

der **Raum der *p*-fach integrierbaren Funktionen**.

Für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *sei* $\|f\|_p := \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}$.

Für $p = \infty$ *ist* $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_\Omega |f(\omega)| = \inf\{K \mid \mu(\{|f| > K\}) = 0\}$ *und* $\mathcal{L}^\infty(\mu) = \{f \in \overline{\mathcal{Z}} \mid \|f\|_\infty < \infty\}$.

Satz 1.94

a) *Seien* $f, g \in \overline{\mathcal{Z}}$ *und* $0 < p, q, r \leq \infty$ *so, dass* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, *dann gilt*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q \qquad \text{(Höldersche Ungleichung).}$$

b) *Seien* $f, g \in \overline{\mathcal{Z}}$ *und* $1 \leq p \leq \infty$, *so ist*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \qquad \text{(Minkowski-Ungleichung).}$$

Insbesondere ist für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ *auch* $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis:

a) Im Fall $p = \infty$ ist $r = q$. Falls $\|f\|_\infty = \infty$, ist die Aussage trivial. Falls $\|f\|_\infty = M < \infty$, ist $|fg| \le Mg$ $[\mu]$ und daher $\|fg\|_r \le M\|g\|_r = \|f\|_\infty \|g\|_r$. Sei nun $p, q < \infty$. Falls entweder $\|f\|_p = 0$, $\|f\|_p = \infty$, $\|g\|_q = 0$ oder $\|g\|_q = \infty$, ist die Aussage wiederum trivial. Daher seien o.E. $0 < \|f\|_p, \|g\|_q < \infty$ und $f, g \ge 0$ (da $\|f\|_p = \||f|\|_p$). Setze

$$\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|_p}, \qquad \tilde{g} := \frac{g}{\|g\|_q},$$

dann ist zu zeigen, dass $\|\tilde{f}\tilde{g}\|_r \le 1$. Wegen der Konvexität der Exponentialfunktion e^x gilt für $x, y > 0$

$$(xy)^r = e^{\frac{r}{p}\, p \log(x) + \frac{r}{q}\, q \log(y)} \le \frac{r}{p}\, x^p + \frac{r}{q}\, y^q$$

(für $x = 0$ oder $y = 0$ ist die Ungleichung trivialerweise richtig) und damit

$$\|\tilde{f}\tilde{g}\|_r^r = \int |\tilde{f}\tilde{g}|^r \, d\mu \le \frac{r}{p} \int |\tilde{f}|^p \, d\mu + \frac{r}{q} \int |\tilde{g}|^q \, d\mu = \frac{r}{p} + \frac{r}{q} = 1.$$

b) Für $p = 1$ und $p = \infty$ gilt $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ offensichtlich, ebenso im Fall $\|f\|_p = \infty$, $\|g\|_p = \infty$ oder $\|f + g\|_p = 0$. Daher ist nur noch der Fall $1 < p < \infty$ mit $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$ und $\|f + g\|_p > 0$ zu betrachten. Wähle $q = \frac{p}{p-1}$, dann ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, somit ist die Hölder-Ungleichung mit $r = 1$ anwendbar. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_p^p &= \int |f + g||f + g|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq \int |f||f + g|^{p-1}\, d\mu + \int |g||f + q|^{p-1}\, d\mu \\
&\leq \|f\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q + \|g\|_p \||f + g|^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p/q} = (\|f\|_p + \|g\|_p) \cdot \|f + g\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

und Division durch $\|f + g\|_p^{p-1}$ ergibt die Behauptung. Wegen

$$|f + g|^p \leq (2 \max(|f|, |g|))^p \leq 2^p(|f|^p + |g|^p)$$

ist $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und damit $\|f + g\|_p < \infty$, so dass die obige Division zulässig ist. $\square$

Korollar 1.95

Sei μ ein endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ und $1 \leq r < q \leq \infty$, dann ist $\mathcal{L}^q(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$.

Beweis: Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ gilt $|f| \leq M\ [\mu]$ für ein $M \in \mathbb{R}_+$, also ist $\|f\|_r \leq M \cdot \mu(\Omega)^{1/r} < \infty$, woraus $\mathcal{L}^\infty(\mu) \subseteq \mathcal{L}^r(\mu)$ für $1 \leq r < \infty$ folgt. Ebenso gilt $\|1\|_p = \mu(\Omega)^{1/p} < \infty$ für alle $0 < p < \infty$, daher folgt für $f \in \mathcal{L}^q(\mu)$ aus der Hölder-Ungleichung

$$\|f\|_r = \|1 \cdot f\|_r \leq \|1\|_p \, \|f\|_q < \infty$$

für $\frac{1}{p} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q} > 0$ und damit die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Die Einschränkung auf endliche Maße μ ist hier wichtig, für nicht-endliche Maße ist die Behauptung i.A. falsch: Betrachte z.B. das Lebesgue-Borel'sche Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \frac{1}{x} \cdot \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$, dann gilt $f \in \mathcal{L}^2(\lambda)$, aber $f \notin \mathcal{L}^1(\lambda)$.

Proposition 1.96 (Tschebyscheff-Ungleichung)

Sei $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $0 < p < \infty$, dann gilt für alle $a > 0$

$$\mu(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{\int |f|^p \, d\mu}{a^p}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\int |f|^p \, d\mu &= \int |f|^p \big(\mathbb{1}_{\{|f|<a\}} + \mathbb{1}_{\{|f|\geq a\}}\big) \, d\mu \\ &\geq \int |f|^p \mathbb{1}_{\{|f|\geq a\}} \, d\mu \geq a^p \, \mu(\{|f| \geq a\})\end{aligned}$$

□

Definition 1.97 (Konvergenz im p-ten Mittel)

Eine Folge $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ **konvergiert in $\mathcal{L}^p(\mu)$** *(oder* **im p-ten Mittel***) gegen $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, falls $\|f_n - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Schreibweise: $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$.*

Satz 1.98 (Riesz-Fischer)

Die Räume $\mathcal{L}^p(\mu)$ sind vollständig für alle $0 < p \leq \infty$, d.h. zu jeder Cauchy-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ existiert ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, so dass $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Beweis: Sei zunächst $1 \leq p < \infty$ und $(f_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$, dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\geq 1}$, so dass $\|f_{n_k} - f_m\|_p \leq 2^{-k}$ für alle $m \geq n_k$, $k \geq 1$. Mit $g_k := f_{n_k} - f_{n_{k+1}}$ gilt dann für alle $n \geq 1$ nach der Minkowski-Ungleichung, dass

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} |g_k| \right\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} < 1.$$

Korollar 1.85 a) impliziert $\| \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \|_p \leq 1$, also konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ μ-fast überall absolut, folglich ist $(f_{n_k}(\omega))_{k\geq 1}$ für μ-fast alle $\omega \in \Omega$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Daher gibt es ein $f \in \overline{\mathcal{Z}}$ mit $f_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} f$ μ-fast überall. Zu zeigen bleibt, dass $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $\|f_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$. Sei $\epsilon > 0$ gegeben, dann gibt es ein $n_0(\epsilon)$, so dass $\|f_l - f_m\|_p < \epsilon$ für alle $l, m \geq n_0(\epsilon)$, da $(f_n)_{n\geq 1}$ n.V. Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Anwendung des Lemmas von Fatou (Lemma 1.84) auf die Folge $(|f_{n_k} - f_m|^p)_{k\geq 1}$ ergibt für alle $m \geq n_0(\epsilon)$

$$\int |f - f_m|^p \, d\mu = \int \liminf_{k\to\infty} |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int |f_{n_k} - f_m|^p \, d\mu \leq \epsilon^p$$

also gilt $\|f_m - f\|_p \to 0$ für $m \to \infty$. Wegen $|f - f_m| \geq |f| - |f_m|$ erhält man ganz analog wie im Beweis von Satz 1.94 b), dass $\|f - f_m\|_p \geq \|f\|_p - \|f_m\|_p$, so dass mit der vorherigen Ungleichung folgt $\|f\|_p \leq \|f_m\|_p + \epsilon < \infty$, also ist auch $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Für $0 < p < 1$ genügt $\|\cdot\|_p^p$ der Dreiecksungleichung, so dass der vorherige Beweis bei Ersetzung von $\|\cdot\|_p$ durch $\|\cdot\|_p^p$ die Behauptung für den Fall $0 < p < 1$ ergibt. Dass die Dreiecksungleichung $\|f + g\|_p^p \leq \|f\|_p^p + \|g\|_p^p$ für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit $0 < p < 1$ gilt, sieht man wie folgt: Für festes $a > 0$ betrachte die Funktion $\varphi_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\varphi_a(t) = a^p + t^p - (a + t)^p$. φ ist monoton wachsend mit $\varphi(0) = 0$, denn $\varphi'(t) = p(t^{p-1} - (a + t)^{p-1}) > 0$, da $a + t > t$ und $p - 1 < 0$. Daher gilt für alle $a, b \geq 0$, dass $(a + b)^p \leq a^p + b^p$. Einsetzen von $a = |f|$, $b = |g|$ und Integration über Ω liefert die Behauptung.

Es bleibt der Fall $p = \infty$ zu betrachten. Sei $(f_n)_{n\geq 1}$ Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$, dann ist

$$N := \bigcup_{n=1}^{\infty} \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\} \cup \bigcup_{m,n=1}^{\infty} \{|f_m - f_n| > \|f_m - f_n\|_\infty\}$$

eine μ-Nullmenge. Für alle $\omega \in N^c$ gilt $|f_m(\omega) - f_n(\omega)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Daher konvergiert $(f_n)_{n\geq 1}$ auf N^c *gleichmäßig* gegen $f := \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_{N^c}$. Insbesondere ist dann auch $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$. $\square$

Definition 1.99 (Konvergenz nach Maß und stochastische Konvergenz)

Seien $(f_n)_{n\geq 1}, f \subset \overline{\mathcal{Z}}$ und die Differenz $f_n - f$ μ-fast überall definiert für alle n.

Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ **konvergiert nach Maß** *gegen f, falls für alle $\epsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0.$$

Schreibweise: $f_n \xrightarrow{n.M.} f$.

Die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ **konvergiert μ-stochastisch** *gegen* $f \iff \forall A \in \mathcal{A}$ *mit* $\mu(A) < \infty$ *und alle* $\epsilon > 0$ *gilt:*

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\} \cap A) \longrightarrow 0.$$

Schreibweise: $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *oder auch* $\mu\text{-}\lim f_n = f$.

Bemerkung: Konvergenz nach Maß impliziert offensichtlich stets stochastische Konvergenz. Falls $\mu(\Omega) < \infty$, sind Konvergenz nach Maß und μ-stochastische Konvergenz äquivalent.

Proposition 1.100

a) *Sei* $\mu(\Omega) < \infty$, $1 \leq r < q \leq \infty$ *und* $(f_n)_{n\geq 1}$ *eine Folge in* $\mathcal{L}^q(\mu)$. *Falls* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^q} f$, *dann gilt auch* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^r} f$.

b) *Seien* $0 < p \leq \infty$, $(f_n)_{n\geq 1}, f \subset \mathcal{L}^p(\mu)$ *und* $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^p} f$, *dann gilt auch* $f_n \xrightarrow{n.M.} f$.

Beweis:

a) Falls $q = \infty$, bedeutet $f_n \xrightarrow{\mathcal{L}^\infty} f$ die μ-fast überall gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ gegen eine μ-fast überall beschränkte Funktion f, woraus wegen $\mu(\Omega) < \infty$ direkt die Konvergenz in $\mathcal{L}^r(\mu)$ folgt. Für $q < \infty$ erhält man wie im Beweis von Korollar 1.95, dass $\|f_n - f\|_r \leq c \cdot \|f_n - f\|_q$ (mit $c = \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{q}}$), woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

b) Für $p = \infty$ folgt die Behauptung wie in a) aus der μ-fast überall gleichmäßigen Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\geq 1}$. Für $p < \infty$ gilt nach der Tschebyscheff-Ungleichung für alle $\epsilon > 0$, dass

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) \leq \frac{\int |f_n - f|^p \, d\mu}{\epsilon^p} = \frac{\|f_n - f\|_p^p}{\epsilon^p} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \square$$

Bemerkung 1.101: Für jedes $1 \leq p \leq \infty$ gilt $\|af\|_p = |a|\|f\|_p$ für alle $a \in \mathbb{R}$. Zusammen mit der Minkowksi-Ungleichung (Satz 1.94 b)) folgt daraus, dass $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein reeller Vektorraum ist. Allerdings ist $\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\mu) \to \mathbb{R}_+$ keine Norm, da aus $\|f\|_p = 0$ nicht $f \equiv 0$ folgt, sondern nur $f = 0$ $[\mu]$.

Dieser Mangel lässt sich aber leicht beseitigen durch

Definition 1.102

Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \overline{\mathcal{Z}}$, dann ist

$$f \sim_\mu g \;:\Longleftrightarrow\; \{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$$

und $L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu)/_{\sim_\mu}$ der Quotientenraum der Äquivalenzklassen.

Auf $L^p(\mu)$ ist dann $\|\cdot\|_p$ eine Norm, und da $\mathcal{L}^p(\mu)$ nach Satz 1.98 vollständig ist, ist $L^p(\mu)$ ein Banachraum für alle $1 \leq p \leq \infty$. Wir betrachten im Folgenden den Fall $p = 2$ genauer und definieren

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : L^2(\mu) \times L^2(\mu) \to \mathbb{R}, \qquad \langle f, g \rangle = \int fg \, d\mu$$

Aus der Linearität des Integrals folgt unmittelbar, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $L^2(\mu)$ ist. Wegen $\|f\|_2^2 = \int f^2 \, d\mu = \langle f, f \rangle$ erzeugt das Skalarprodukt die Norm, so dass $(L^2(\mu), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum ist. Für $f, g \in L^2(\mu)$ schreiben wir $f \perp g$, falls $\langle f, g \rangle = 0$.

Lemma 1.103

Für $f, g \in L^2(\mu)$ gilt $\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2$.

Beweis: Aus der Definition von $\|\cdot\|_2$ sowie der Symmetrie und Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}\|f+g\|_2^2 + \|f-g\|_2^2 &= \langle f+g, f+g\rangle + \langle f-g, f-g\rangle \\ &= 2\langle f,f\rangle + 2\langle g,g\rangle = 2\|f\|_2^2 + 2\|g\|_2^2\end{aligned} \qquad \square$$

Proposition 1.104

Sei $M \subseteq L^2(\mu)$ ein abgeschlossener, linearer Teilraum. Dann hat jede Funktion $f \in L^2(\mu)$ eine eindeutige Zerlegung $f = g + h$ mit $g \in M$, $h \perp M$.

Beweis: Für $f \in L^2(\mu)$ definiere $d_f := \inf_{g\in M}\{\|f-g\|_2\}$. Wähle Folge $(g_n)_{n\geq 1} \subset M$ mit $\|f-g_n\|_2 \to d_f$ für $n \to \infty$, dann gilt

$$\begin{aligned}4d_f^2 + \|g_m - g_n\|_2^2 \quad &= \quad \inf_{g\in M}\{\|2f-2g\|_2^2\} + \|g_m-g_n\|_2^2 \\ &\leq \quad \|2f - g_m - g_n\|_2^2 + \|g_m - g_n\|_2^2 \\ &\underset{\text{Lemma 1.103}}{=} \quad 2\|f-g_m\|_2^2 + 2\|f-g_n\|_2^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 4d_f^2\end{aligned}$$

Folglich gilt $\|g_m - g_n\|_2^2 \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also ist $(g_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge, für die wegen der Vollständigkeit von $L^2(\mu)$ ein Grenzwert g existiert. Da $(g_n)_{n\geq 1} \subset M$ und M n.V. abgeschlossen ist, gilt $g \in M$. Sei $h := f - g$, dann gilt für alle $t \neq 0$ und alle $l \in M$, dass

$$d_f^2 \leq \|h + tl\|_2^2 = d_f^2 + 2t\langle h, l\rangle + t^2\|l\|_2^2 \quad \text{bzw.} \quad 0 \leq t\,(2\langle h, l\rangle + t\|l\|_2^2),$$

was dann und nur dann möglich ist, wenn $\langle h, l\rangle = 0$ für alle $l \in M$, also ist $h \perp M$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $f = g' + h'$ eine weitere Zerlegung, dann ist einerseits $g - g' \in M$ (da M n.V. linearer Unterraum) und andererseits $g - g' = h - h' \perp M$, also $g - g' \perp g - g'$. Das bedeutet aber $0 = \langle g - g', g - g'\rangle = \|g - g'\|_2^2$, also $g - g' = 0$ und somit auch $h - h' = 0$, also $g = g'$ und $h = h'$. □

Proposition 1.105 (Riesz-Fréchet)

Eine Abbildung $F : L^2(\mu) \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig und linear, falls es ein (eindeutig bestimmtes) $h \in L^2(\mu)$ gibt, so dass für alle $f \in L^2(\mu)$ gilt: $F(f) = \langle f, h\rangle$.

Beweis: $\Leftarrow$: Wegen der Bilinearität des Skalarprodukts ist $f \mapsto \langle f, h\rangle$ linear, die Stetigkeit folgt aus der Hölder-Ungleichung (mit $r = 1$, $p = q = 2$), denn

$$\begin{aligned}|\langle f, h\rangle - \langle f', h\rangle| = |\langle f - f', h\rangle| &= \left|\int (f - f')\, h\, d\mu\right| \\ &\leq \int |(f - f')\, h|\, d\mu \leq \|f - f'\|_2 \|h\|_2.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$: Falls $F \equiv 0$, wähle $h = 0$. Ist $F \not\equiv 0$, ist $M := F^{-1}(\{0\})$ wegen der Stetigkeit und Linearität von F ein abgeschlossener, linearer Unterraum von $L^2(\mu)$. Für $f' \in L^2(\mu) \setminus M$ gibt es nach Proposition 1.104 eine eindeutige orthogonale Zerlegung $f' = g' + h'$ mit $g' \in M$, $h' \perp M$. Wegen $f' \notin M$ ist $h' \neq 0$ und $F(h') = F(f') - F(g') = F(f') \neq 0$. Für $h'' := \frac{h'}{F(h')}$ gilt $h'' \perp M$ und $F(h'') = 1$, und für alle $f \in L^2(\mu)$ folgt

$$F\big(f - F(f)h''\big) = F(f) - F(f)F(h'') = 0,$$

daher ist $f - F(f)h'' \in M$ und somit $0 = \langle f - F(f)h'', h''\rangle$, also $\langle f, h''\rangle = \langle F(f)h'', h''\rangle$, d.h.

$$F(f) = F(f)\frac{\langle h'', h''\rangle}{\|h''\|_2^2} = \frac{1}{\|h''\|_2^2}\langle F(f)h'', h''\rangle = \frac{1}{\|h''\|_2^2}\langle f, h''\rangle = \langle f, \tfrac{h''}{\|h''\|_2^2}\rangle.$$

Da $f \in L^2(\mu)$ beliebig war, folgt die Behauptung mit $h = \frac{h''}{\|h''\|_2^2}$.

Zur Eindeutigkeit: Sei $F(f) = \langle f, h_1\rangle = \langle f, h_2\rangle$, so ist $\langle f, h_1 - h_2\rangle = 0$ für alle $f \in L^2(\mu)$. Mit $f = h_1 - h_2$ folgt

$$\|h_1 - h_2\|_2^2 = \langle h_1 - h_2, h_1 - h_2\rangle = 0,$$

also ist $h_1 - h_2 = 0$, d.h. $h_1 = h_2$. □

Transformationsformeln

Bildmaße wurden bereits in Proposition 1.78 eingeführt. Nachfolgend geben wir einige Integrationsregeln für Bildmaße an.

Proposition 1.106

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbare Abbildung sowie $f \in \overline{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}')$, dann gilt:

a) $f \in \overline{\mathcal{Z}}(\mathcal{A}')_+ \implies \int f \, d\mu^T = \int f \circ T \, d\mu.$

b) $f \in \mathcal{L}^1(\mu^T) \iff f \circ T \in \mathcal{L}^1(\mu)$, *und dann ist* $\int f \, d\mu^T = \int f \circ T \, d\mu.$

Beweis:

a) Sei $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}')$, dann ist

$$f \circ T = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\mathbb{1}_{A_i} \circ T) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{1}_{T^{-1}(A_i)} \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A}).$$

Somit gilt nach Definition des μ-Integrals

$$\int f \circ T \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\big(T^{-1}(A_i)\big) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu^T(A_i) = \int f \, d\mu^T.$$

Sei nun $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+(\mathcal{A}')$, dann existiert nach dem Darstellungssatz 1.81 b) eine Folge $(f_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{E}_+(\mathcal{A}')$ mit $f_n \uparrow f$. Folglich gilt $f_n \circ T \uparrow f \circ T$ und $f_n \circ T \in \mathcal{E}_+(\mathcal{A})$.Daher gilt

$$\int f \circ T \, d\mu = \sup_{n \geq 1} \int f_n \circ T \, d\mu = \sup_{n \geq 1} \int f_n \, d\mu^T = \int f \, d\mu^T.$$

b) Wegen $\int f \circ T \, d\mu = \int (f \circ T)^+ \, d\mu - \int (f \circ T)^- \, d\mu$ und $(f \circ T)^{\pm} = f^{\pm} \circ T$ folgt b) aus a). $\square$

Proposition 1.107

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $T : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\Omega', \mathcal{A}')$ eine bijektive, messbare Abbildung und T^{-1} $\mathcal{A}'$-$\mathcal{A}$-messbar. Weiter sei $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+(\mathcal{A})$ und $f\mu$ das Maß mit Dichte f bzgl. μ gemäß Definition 1.86. Dann gilt

$$(f\mu)^T = (f \circ T^{-1})\mu^T.$$

Beweis: Nach Proposition 1.106 gilt für alle $A' \in \mathcal{A}'$

$$\begin{aligned} (f\mu)^T(A') &= \int_{T^{-1}(A')} f\, d\mu = \int (\mathbb{1}_{A'} \circ T)\, f\, d\mu \\ &= \int (\mathbb{1}_{A'} \circ T)\big((f \circ T^{-1}) \circ T\big)\, d\mu \\ &\underset{\text{Prop. 1.106 a)}}{=} \int \mathbb{1}_{A'}\, (f \circ T^{-1})\, d\mu^T = \int_{A'} f \circ T^{-1}\, d\mu^T \end{aligned}$$

$\square$

Satz 1.108 (Transformationsformel für Lebesgue-Integrale)

Seien $V, W \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und nicht-leer, $T : V \to W$ eine stetig differenzierbare, bijektive Abbildung.

a) *Für alle $h \in \mathcal{L}^1(\lambda_W^k) \cup \overline{\mathcal{Z}}_+(W)$ gilt*

$$\int_W h \, d\lambda_W^k = \int_V (h \circ T) |\det DT| \, d\lambda_V^k,$$

wobei $\lambda_V^k = \lambda^k|_V$, $\lambda_W^k = \lambda^k|_W$, und $DT = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i,j \leq k}$ die Jacobi-Matrix bezeichne.

b) *Für $f \in \overline{\mathcal{Z}}_+(V)$ gilt $(f\lambda_V^k)^T = (f \circ T^{-1}) |\det DT^{-1}| \, \lambda_W^k$.*

Beweis:

a) Siehe Elstrodt, S. 203–207.

b) Sei $h \in \overline{\mathcal{Z}}_+(W)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_W h\, d(f\lambda_V^k)^T &\underset{1.106\text{ a)}}{=} \int_V (h \circ T) f\, d\lambda_V^k \\
&\underset{\text{a)}}{=} \int_W (h \circ T \circ T^{-1})(f \circ T^{-1})\,|\det DT^{-1}|\, d\lambda_W^k \\
&= \int_W h\,(f \circ T^{-1})\,|\det DT^{-1}|\, d\lambda_W^k
\end{aligned}$$

Einsetzen von $h = \mathbb{1}_A$ mit $A \in \mathcal{B}^k \cap W$ ergibt die Behauptung. $\square$

Linearformen und Maße

Bisher sind wir von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ausgegangen, haben darauf das μ-Integral für messbare Funktionen definiert und so eine Linearform $L : \mathcal{L}^1(\mu) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \int f\, d\mu$ auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^1(\mu)$ erhalten.

Man kann sich auch die Frage stellen, ob man aus einer Linearform mit entsprechenden Eigenschaften ein Maß erhalten kann.

Sei Ω eine nicht-leere Menge und $\mathfrak{F} = \{f : \Omega \to \mathbb{R}\}$ eine Menge von Funktionen mit den Eigenschaften

(1) Für alle $u, v \in \mathfrak{F}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist auch $\alpha u + \beta v \in \mathfrak{F}$, d.h. $\mathfrak{F}$ ist ein Vektorraum.

(2) $u \in \mathfrak{F} \implies |u| \in \mathfrak{F}$.

Aus (1) und (2) folgt

(3) $u, v \in \mathfrak{F} \implies \sup(u, v) \in \mathfrak{F}$ und $\inf(u, v) \in \mathfrak{F}$.

Denn: $\sup(u, v) = \frac{1}{2}(u + v + |u - v|)$ und $\inf(u, v) = -\sup(-u, -v)$.

Definition 1.109

Die Menge $\mathfrak{F}$ heißt **Vektorverband**, *falls sie die Eigenschaften (1) und (3) erfüllt.*
$\mathfrak{F}$ heißt **Stone'scher Vektorverband**, *falls zusätzlich gilt*

(4) $u \in \mathfrak{F} \implies \inf(u, 1) \in \mathfrak{F}$

Bemerkung: (4) ist stets erfüllt, falls $f \equiv 1 \in \mathfrak{F}$.
Aus (4) folgt: Für $u \in \mathfrak{F}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ist auch $\inf(u, \alpha) \in \mathfrak{F}$, denn $\inf(u, \alpha) = \alpha \inf(\frac{u}{\alpha}, 1)$.

Beispiel 1.110: Ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $p \geq 1$, so ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ Stone'scher Vektorverband, denn $\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein Vektorraum, für den nach Definition gilt $|u| \in \mathcal{L}^p(\mu) \Leftrightarrow u \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Da ferner $\inf(u, 1) \leq |u|$, folgt, dass mit $u \in \mathcal{L}^p(\mu)$ auch $\inf(u, 1) \in \mathcal{L}^p(\mu)$.

Definition 1.111

Eine auf einem Stone'schen Vektorverband $\mathfrak{F}$ reellwertiger Funktionen definierte Linearform $I : \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ heißt **abstraktes Integral**, *wenn gilt*

a) *I ist positiv, d.h. $I(f) \geq 0$ für $f \in \mathfrak{F}_+$.*

b) *Für jede monoton aufsteigende Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ in $\mathfrak{F}_+$ mit $\sup_{n\geq 1} f_n \in \mathfrak{F}$ gilt $I(\sup_{n\geq 1} f_n) = \sup_{n\geq 1} I(f_n)$.*

Bemerkung: Äquivalent zu b) ist

b') Für jede monoton fallende Folge $f_n \downarrow$ in $\mathfrak{F}$ mit $\inf_{n\geq 1} f_n = 0$ gilt $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = 0$.

Denn: Gelte $f_n \uparrow f$, so gilt $f - f_n \downarrow 0$ und $\lim_{n\to\infty} I(f - f_n) = I(f) - \lim_{n\to\infty} I(f_n) = I(f) - \sup_{n\geq 1} I(f_n) = I(f) - I(\sup_{n\geq 1} f_n) = I(f) - I(f) = 0$.

Die Umkehrung folgt durch Übergang von $f_n \downarrow 0$ zu $f_1 - f_n \uparrow f_1$.

Definition 1.112

Sei $\mathfrak{F}$ Stone'scher Vektorverband reellwertiger Funktionen auf Ω. Eine Menge $G \subseteq \Omega$ heißt **$\mathfrak{F}$-offen**, *wenn es eine isotone Folge $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{F}_+$ gibt mit $\mathbb{1}_G = \sup_{n\geq 1} f_n$. $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathfrak{F})$ sei die Klasse der $\mathfrak{F}$-offenen Mengen. Sei $\mathfrak{F}_+^* := \{f : \Omega \to \mathbb{R}_+ \mid f = \sup_{n\geq 1} f_n$ für $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathfrak{F}_+$ isoton$\}$, dann gilt $\mathcal{G} = \{G \subseteq \Omega \mid \mathbb{1}_G \in \mathfrak{F}_+^*\}$.*

Bemerkung 1.113: Es gilt $\{f > \alpha\} \in \mathcal{G}$ für jedes $f \in \mathfrak{F}_+^*$ und alle $\alpha \geq 0$. Ferner ist $\mathcal{G}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathfrak{F})$.

Satz 1.114 (P. Daniell, M.H. Stone)

Sei Ω nicht-leere Menge, $\mathfrak{F}$ Stone'scher Vektorverband reellwertiger Funktionen auf Ω sowie I ein abstraktes Integral auf $\mathfrak{F}$. Dann existiert genau ein Maß μ auf $\sigma(\mathfrak{F})$ mit den Eigenschaften

a) $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}^1(\mu)$,

b) $I(f) = \int f \, d\mu$ *für alle* $f \in \mathfrak{F}$,

c) $\forall\, A \in \sigma(\mathfrak{F}):\ \mu(A) = \begin{cases} \inf_{G\in\mathcal{G}, A\subseteq G} \mu(G), & \{G \in \mathcal{G} \mid A \subseteq G\} \neq \emptyset, \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$