Übungen zu der Vorlesung
„Stochastik II“
Blatt 06

Abgabe: Freitag, 11.07.2025, 10:15 Uhr.
(Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Aufgabenblatt. Sie dürfen die Übungsblätter in Zweiergruppen bearbeiten.)

Aufgabe 1 (Ineffizienter Schätzer) (2+2 Punkte)
Es sei $\mathcal{E} = \{\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathbb{P}_\theta^{\otimes n})_{\theta\in(0,\infty)}\}$ das n-fache Gauß'sche Produktmodell mit bekanntem Erwartungswert μ_0 und Varianz θ, das heißt $\mathbb{P}_\theta = \mathcal{N}(\mu_0, \theta)$. Weiter sei

$$T_n(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i - \mu_0|$$

ein Schätzer für $\tau(\theta) = \sqrt{\theta}$. Zeigen Sie

(i) T_n ist erwartungstreu.

(ii) Der Schätzer ist *ineffizient*, das heißt die Varianz von T_n erreicht für kein $\theta > 0$ die Cramér-Rao-Schranke $\frac{\tau'(\theta)^2}{I(\theta)}$ (vergleiche mit Satz 2.29).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für eine normalverteilete Zufallsvariable $X \sim N(\mu_0, \theta)$ das vierte zentrierte Moment, das heißt $\mathbb{E}_\theta[(X-\mu_0)^4]$, gegeben ist durch $3\theta^2$.

Aufgabe 2 (Testproblem) (2+2 Punkte)
Ein neues Medikament soll die Dauer einer Erkältung deutlich reduzieren. Allgemein gilt, dass eine Erkältung im Mittel 9 Tage lang anhält. Eine Studie lieferte bei Einnahme des Medikaments folgende Erkältungsdauern (in Tagen):

$$9, 10, 13, 8, 8, 10, 13, 8, 6, 11, 8, 10, 10, 9, 9, 10, 14, 7, 8, 12.$$

(i) Bestimmen Sie das empirische Mittel und die empirische Varianz.

(ii) Hält das Medikament, was es verspricht? Angenommen die Daten seien Realisierungen von unabhängigen, normalverteilten Zufallsgrößen mit unbekannten Parametern. Entscheiden Sie zu den Signifikanzniveaus $\alpha_1 = 10\%$, $\alpha_2 = 5\%$ und $\alpha_3 = 2.5\%$.
Hinweis: Verwenden Sie die beigefügte Tabelle zu den Quantilen der t-Verteilung.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (monotone Dichtequotienten) (4 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ abzählbar, $\{\mathbb{P}_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ eine Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit gemeinsamen minimalem Träger Ω und mit monotonem Dichtequotienten (d.h. für alle $\theta_1 < \theta_2$ ist der Dichtequotient

$$\omega \mapsto \frac{p_{\theta_2}(\omega)}{p_{\theta_1}(\omega)}$$

monoton wachsend in ω). Sei $X : \Omega \to S$ ($S \subset \mathbb{R}$ abzählbar) eine Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass für jede monoton wachsende Funktion $h : S \to \mathbb{R}$ gilt, dass auch

$$\theta \mapsto \mathbb{E}_\theta[h(X)]$$

monoton wächst.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $0 \leq p_{\theta_2}(y)p_{\theta_1}(x) - p_{\theta_1}(y)p_{\theta_2}(x)$ *falls* $x \leq y$, *und folgern Sie daraus* $\mathbb{E}_{\theta_2}[h(X)] - \mathbb{E}_{\theta_1}[h(X)] \geq 0$. *Es reicht für die volle Punktzahl, den Fall* $S = \mathbb{N}$ *zu betrachten.*

Aufgabe 4 (Konfidenzintervalle) (4 Punkte + 4 Bonuspunkte)

Zeigen Sie, dass im Normalverteilungsmodell für die Längen $|I_n^\mu|$ und $|I_n^{\sigma^2}|$ der Konfidenzintervalle

(i) $I_n^\mu := \left(\bar{X}_n - \sqrt{\frac{s_n^2(X)}{n}} t_{n-1,1-\alpha/2},\ \bar{X}_n + \sqrt{\frac{s_n^2(X)}{n}} t_{n-1,1-\alpha/2}\right)$,

(ii) $I_n^{\sigma^2} = \left(\frac{n-1}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} s_n^2(X),\ \frac{n-1}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} s_n^2(X)\right)$

aus Theorem 3.10 mit $\theta = (\mu, \sigma^2)$ gilt, dass

(i) $|I_n^\mu| \longrightarrow_{\mathbb{P}_\theta} 0 \quad$ für $n \longrightarrow \infty$,

(ii) $|I_n^{\sigma^2}| \longrightarrow_{\mathbb{P}_\theta} 0 \quad$ für $n \longrightarrow \infty$.

Hinweis: a) Zeigen Sie zunächst, dass die t*-Verteilung (in Verteilung) gegen die Standardnormalverteilung konvergiert, wenn man die Anzahl der Freiheitsgrade gegen unendlich gehen lässt. Verwenden Sie dann den Satz von Slutsky.*

b) Zeigen Sie zunächst mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes, dass beide Quantile der χ^2_{n-1}*-Verteilung geteilt durch* $(n-1)$ *gegen 1 konvergieren.*

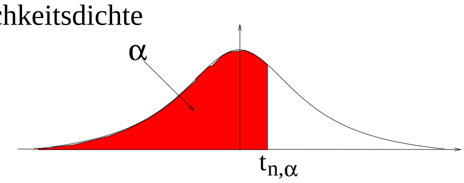
Bitte wenden!

Quantile $t_{n,\alpha}$ der Studentschen t-Verteilung

Werte $t_{n,\alpha}$ für gegebene Werte α der t-Verteilung mit Freiheitsgrad n.

$$t_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\,\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte



n	$\alpha = 0.60$	0.70	0.80	0.90	0.95	0.975	0.990	0.995	0.999	0.9995
1	0.325	0.727	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31	636.62
2	0.289	0.617	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.598
3	0.277	0.584	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4	0.271	0.569	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	0.267	0.559	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.265	0.553	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.263	0.549	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.262	0.546	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.261	0.543	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	0.260	0.542	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.260	0.540	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.259	0.539	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	0.259	0.538	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	0.258	0.537	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	0.258	0.536	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.258	0.535	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.257	0.534	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.257	0.534	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	0.257	0.533	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.257	0.533	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	0.257	0.532	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.256	0.532	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.256	0.532	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24	0.256	0.531	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.256	0.531	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	0.256	0.531	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.256	0.531	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	0.256	0.530	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.256	0.530	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.256	0.530	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	0.255	0.529	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.255	0.528	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.254	0.527	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70	0.254	0.527	0.847	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80	0.254	0.526	0.846	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90	0.254	0.526	0.846	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100	0.254	0.526	0.845	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
110	0.254	0.526	0.845	1.289	1.659	1.982	2.361	2.621	3.166	3.381
120	0.254	0.526	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291