

Übungen zu der Vorlesung „Stochastik II“ Blatt 05

Abgabe: Freitag, 27.06.2025, 10:15 Uhr.

(Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Aufgabenblatt. Sie dürfen die Übungsblätter in Zweiergruppen bearbeiten.)

Aufgabe 1 (Asymptotische Konfidenzintervalle) (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{E} := (\mathbb{N}_0^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0^n), (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in (0, \infty)})$ ein n -faches Produktmodell mit $\mathbb{P}_\theta = \text{Poi}(\theta)$. Bestimmen Sie ein asymptotisches Konfidenzintervall für θ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Aufgabe 2 (χ_n^2 -Verteilung) (1+1+2 Punkte)

Es seien X_1, \dots, X_k unabhängige Zufallsvariablen und $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, so dass $X_i \sim \chi_{n_i}^2$ für $i = 1, \dots, k$.

- (i) Zeigen Sie für $N_k := \sum_{i=1}^k n_i$, dass $\sum_{i=1}^k X_i \sim \chi_{N_k}^2$.
- (ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X_i] = n_i$.
- (iii) Zeigen Sie, dass $\text{Var}(X_i) = 2n_i$.

Aufgabe 3 (Varianzschätzung im Zweistichprobenmodell) (2+2 Punkte)

Es sei $\mathcal{E} := (\mathbb{R}^{n+m}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{n+m}), (\mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2, \sigma^2)})_{(\theta_1, \theta_2, \sigma^2) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)})$ ein $(n + m)$ -faches Produktmodell und es seien (X_1, \dots, X_n) und (Y_1, \dots, Y_m) unabhängige Beobachtungen, so dass

- X_i für $i = 1, \dots, n$ unter $\mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2, \sigma^2)}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ_1 und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$,
- Y_i für $i = 1, \dots, m$ unter $\mathbb{P}_{(\theta_1, \theta_2, \sigma^2)}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ_2 und unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$.

Zeigen Sie, dass

$$S_{n,m}^2 := \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y}_m)^2 \right)$$

ein erwartungstreuer und konsistenter Schätzer für σ^2 ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Konfidenzintervalle im Zweistichprobenmodell)

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Situation aus Aufgabe 3 und bestimmen Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall für $\theta_1 - \theta_2$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.

Hinweis: Da σ^2 unbekannt ist, können Sie nicht einfach das Konfidenzintervall aus Aufgabe 4, Blatt 04 verwenden, sondern müssen zunächst σ^2 schätzen. Verwenden Sie hierzu den Schätzer aus Aufgabe 3.