Übungen zu der Vorlesung „Stochastik II“

Blatt 04

Abgabe (Aufgabe 1 & Aufgabe 2): Freitag, 06.06.2025, 10:15 Uhr.
Abgabe (Aufgabe 3 & Aufgabe 4): Montag, 16.06.2025, 10:15 Uhr.
(Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Aufgabenblatt. Sie dürfen die Übungsblätter in Zweiergruppen bearbeiten.)

Aufgabe 1 (Asymptotische Normalität von ML-Schätzern) (2+2+2 Punkte)
Diese Aufgabe zeigt unter geeigneten Regularitätsvoraussetzungen, dass Maximum-Likelihood-Schätzer asymptotisch normalverteilt sind. Es sei dazu $\Theta \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge,

$$\mathcal{E} := \big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n} : \theta \in \Theta\}\big)$$

ein n-faches Produktmodell und es seien $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. Beobachtungen mit Dichtefunktion f_θ. Angenommen die Voraussetzungen (i)-(iii) aus Satz 2.29 aus der Vorlesung seien erfüllt für $d = 1$ und es gelte, dass die Funktion $\theta \mapsto \log(f_\theta(x))$ zweimal stetig differenzierbar ist. Definiere

$$U_n(\theta) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \theta} \log(f_\theta(X_i)) \quad \text{und} \quad W_n(\theta) := \frac{\partial}{\partial \theta} U_n(\theta)$$

für alle $\theta \in \Theta$ und es bezeichne $\hat{\theta}_n$ den Maximum-Likelihood-Schätzer für θ (wobei hier angenommen wird, dass dieser Schätzer auch tatsächlich existiert). Weiterhin gelte die stochastische Konvergenz

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log(f_{\theta_n^*}(X_i)) \longrightarrow_{\mathbb{P}_\theta} -I_1(\theta), \quad \text{für } n \longrightarrow \infty, \tag{1}$$

für jeden konsistenten Schätzer θ_n^* für θ, wobei $I_1(\theta)$ in Satz 2.29 definiert wurde.

(i) Zeigen Sie, dass ein Schätzer θ_n^* mit $|\theta_n^* - \theta| \leq |\hat{\theta}_n - \theta|$ existiert, so dass

$$U_n(\hat{\theta}_n) = U_n(\theta) + W_n(\theta_n^*)(\hat{\theta}_n - \theta).$$

Bitte wenden!

(ii) Beweisen Sie, dass

$$\frac{1}{\sqrt{n}} U_n(\theta) \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I_1(\theta)) \quad \text{und} \quad \frac{1}{n} W_n(\theta_n^*) \longrightarrow_{\mathbb{P}_\theta} -I_1(\theta).$$

(iii) Folgern Sie aus (i) und (ii), dass

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{I_1(\theta)}\Big).$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Betrachte das statistische Modell aus Aufgabe 1 mit $(X_1, \dots, X_n)$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Dichtefunktion f_θ. Angenommen $\theta \mapsto \log(f_\theta(x))$ sei zweimal stetig differenzierbar und es gelte die Vertauschbarkeit von Differentiation und Integration. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}_\theta\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \log(f_\theta(X_1))\right] = -\mathbb{E}_\theta\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \log(f_\theta(X_1))\right)^2\right].$$

Die Annahme (1) *aus Aufgabe 1 ist also aus Stetigkeitsgründen und einer Anwendung des schwachen Gesetzes großer Zahlen tatsächlich in vielen Situationen erfüllt.*

Aufgabe 3 (1+1+1+1 Punkte)

Es sei $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion, das heißt F ist rechtsseitig stetig und monoton wachsend mit $\lim_{x\longrightarrow -\infty} F(x) = 1 - \lim_{x\longrightarrow\infty} F(x) = 0$. Wir definieren $F^{-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $F^{-1}(u) := \inf\{z \in \mathbb{R}\colon F(z) \geq u\}$. Zeigen Sie

(i) F^{-1} ist monoton wachsend,

(ii) $F \circ F^{-1}(u) \geq u$ für alle $u \in [0,1]$,

(iii) $F^{-1} \circ F(x) \leq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(iv) Für $u \in [0,1]$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt $F(x) \geq u$ genau dann, wenn $x \geq F^{-1}(u)$.

Aufgabe 4 (Konfidenzintervalle im Zweistichprobenproblem) (4 Punkte)

Es sei $\mathcal{E} := (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)})_{(\theta_1,\theta_2)\in\mathbb{R}^2})$ ein n-faches Produktmodell und $(X_1, \dots, X_n)$ und $(Y_1, \dots, Y_m)$ seien unabhängige Beobachtungen, sodass

- X_i für $i = 1, \dots, n$ unter $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ_1 und bekannter Varianz $\sigma_1^2 > 0$,
- Y_i für $i = 1, \dots, m$ unter $\mathbb{P}_{(\theta_1,\theta_2)}$ normalverteilt ist mit Erwartungswert θ_2 und bekannter Varianz $\sigma_2^2 > 0$.

Bestimmen Sie ein symmetrisches Konfidenzintervall für $\theta_1 - \theta_2$ zum Konfidenzniveau $1 - \alpha$.