Übungen zu der Vorlesung „Stochastik II“ Blatt 02

Abgabe: Freitag, 16.05.2025, 10:15 Uhr.

(Schreiben Sie Ihren Namen auf jedes Aufgabenblatt. Sie dürfen die Übungsblätter in Zweiergruppen bearbeiten.)

Aufgabe 1

(1+2+1 Punkte)

Ein unvorbereiteter Student schreibt eine Multiple-Choice-Klausur mit n Aufgaben. Jede von diesen beantwortet der Student unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% richtig. Um das Bestehen der Klausur zu erschweren, verlangt der strenge Professor, dass dafür mindestens 60% der Aufgaben korrekt beantwortet werden müssen. Es bezeichne p_n die Wahrscheinlichkeit, dass der Student eine solche Klausur mit n Aufgaben besteht.

- (a) Bestimmen Sie p_{10} .
- (b) Beweisen oder widerlegen Sie, ohne p_{100} exakt zu berechnen: $p_{100} < p_{10}$.
- (c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ gilt.

Interpretation: Die Aufgabe zeigt, dass unvorbereitete Studierende bei sehr langen Klausuren mit nahezu 100% Wahrscheinlichkeit durchfallen.

Aufgabe 2

(1+2+1 Punkte)

Betrachten Sie die Situation aus Aufgabe 3, Blatt 1.

- (a) Geben Sie das zugehörige statistische Modell $\mathcal{E}$ an und definieren Sie die Statistik $\hat{b}_n$.
- (b) Berechnen Sie die Varianz $\text{Var}_b(\hat{b}_n)$.
Hinweis: Die Dichtefunktion $f_{n,b}$ von $\hat{b}_n$ ist gegeben durch $f_{n,b}(t) := \frac{n}{b^n} t^{n-1} \mathbb{1}_{\{t \in [0,b]\}}$
- (c) Es sei $\tilde{b}_n := \frac{n+1}{n} \hat{b}_n$ die erwartungstreue Modifikation von $\hat{b}_n$. Berechnen Sie die Varianz $\text{Var}_b(\tilde{b}_n)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Konvexe Funktionen)

(2+2 Punkte)

Sei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion. Wir sagen g ist *konvex*, wenn für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt, dass

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).$$

- (a) Zeigen Sie, dass g genau dann konvex ist, wenn für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ ein $K_0 = K(x_0) \in \mathbb{R}$ existiert, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass

$$g(x) \geq g(x_0) + K_0(x - x_0).$$

- (b) Sei $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$ und $\mathbb{E}[|g(X)|] < \infty$. Zeigen Sie, unter Verwendung von (a), dass

$$g(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[g(X)].$$

Aufgabe 4 (Momentenschätzer)

(4 Punkte)

Betrachten Sie das statistische Modell

$$\mathcal{E} = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_\theta : \theta \in (0, \infty))),$$

wobei $(\mathbb{P}_\theta : \theta \in (0, \infty))$ die Familie der *Laplace-Verteilungen* sei, das heißt die Dichten sind gegeben durch

$$f_\theta: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad f_\theta(x) = \frac{\theta}{2} e^{-\theta|x|}.$$

Eine Stichprobe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$ aus dem Stichprobenraum des zugehörigen Produktmodells $\mathcal{E} = \mathcal{E}^n$ besteht dann aus n unabhängigen, identisch nach $\mathbb{P}_\theta$ verteilten Zufallsvariablen. Bestimmen Sie einen Momentenschätzer für $\mathbb{P}_\theta(X_1 > c)$ für ein beliebiges, aber festes $c \in \mathbb{R}$.

Aufgaben zur Selbstkontrolle

- (1) Formulieren Sie die Definition der empirischen Varianz s_n^2 .
- (2) Wieso wird die empirische Varianz mit $\frac{1}{n-1}$, statt $\frac{1}{n}$ normiert?
- (3) Formulieren Sie die Definition von Konsistenz.
- (4) Finden Sie ein Beispiel für einen erwartungstreuen, aber nicht konsistenten Schätzer.