UNI FREIBURG

Maschinelles Lernen aus Stochastischer Sicht — Sommersemester 2024

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 4

Abgabe: Freitag, 17.05.2024, 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $K \subseteq \mathbb{R}$ kompakt und $g\colon K \to \mathbb{R}$ differenzierbar in x^*. Zeigen Sie, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $\lambda > 0$ existiert, sodass

$$\left| \frac{g(x/\lambda + x^*) - g(x^*)}{x/\lambda} - g'(x^*) \right| < \varepsilon \quad \text{für all } x \in K.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass im linearen Modell

$$Y \sim \mathcal{N}(A\beta, \sigma^2 \operatorname{Id}), A \in \mathbb{R}^{n\times d}, \beta \in \mathbb{R}^d, \sigma^2 \in (0,\infty), \tag{1}$$

für den KQS $\hat{\beta}$ gilt, dass $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(A^\top A)^{-1})$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $\hat{s}^2$ gegeben durch

$$\hat{s}^2 := \frac{1}{n-d}\|Y - \hat{Y}\|^2,$$

wobei $\hat{Y} := A\hat{\beta}$ für den KQS $\hat{\beta}$. Zeigen Sie, dass unter $Y \sim \mathcal{N}(A\beta, \sigma^2 \operatorname{Id})$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ und A vollen Rang gilt, dass

$$\frac{\langle x, \hat{\beta} - \beta\rangle}{\hat{s}\|x^\top A^\dagger\|} \sim t_{n-d}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\frac{(n-d)}{\sigma^2}\hat{s}^2 \sim \chi^2_{n-d}$ *und die Zufallsvariablen* $\hat{s}^2$ *und* $\hat{\beta}$ *unabhängig sind.*

Aufgabe 4 (4 Punkte Bonus)**.** Verwenden Sie das Resultat aus Aufgabe 3, um zu zeigen, dass

$$\langle x, \hat{\beta}\rangle \pm t_{n-d,1-\alpha/2}\hat{s}\|x^\top A^\dagger\|$$

ein Konfidenzbereich für $\langle x, \beta\rangle$ zum level α ist.

Für Aufgabe 3, können Sie folgenden Satz verwenden:

Satz Es sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig.

(a) Es seien $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2_n$$

(b) Es seien $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \chi^2_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t_n.$$