Maschinelles Lernen aus Stochastischer Sicht **Sommersemester 2024**

Vorlesung: Prof. Dr. Thorsten Schmidt
Übung: Moritz Ritter

Übungsblatt 3

Abgabe: Freitag, 10.05.2022, 18:00 Uhr.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** Sei $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass Polynome f_n vom Grad höchstens n existieren, sodass

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Definieren Sie dazu das Bernsein Polynom f_n gegeben durch:

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Schreiben Sie dann $f_n(x)$ als Erwartungswert einer Verteilung und verwenden Sie die gleichmäßige Stetigkeit von f und die Tschebycheff Ungleichung.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**

1. Zeigen Sie: In jedem normierten Raum X existiert zu jedem $x \in X$, $x \neq 0$, ein Funktional $x' \in X'$ mit

   $$\|x'\| = 1 \quad \text{und} \quad x'(x) = \|x\|.$$

   Hinweis: Definieren Sie zunächst ein geeignetes Funktional auf $\operatorname{span}\{x\}$ *und setzen sie dieses mit dem Satz von Hahn-Banach auf* X *fort.*

2. In jedem normierten Raum gilt für alle $x \in X$

   $$\|x\| = \sup_{x'\in X', \|x'\|\leq 1} |x'(x)|.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq q < \infty$. Dann ist $L^q[a,b] \subset L^p[a,b]$; genauer gilt für $f \in L^q[a,b]$

$$\|f\|_p \,/ (b-a)^{1/p} \leq \|f\|_q \,/ (b-a)^{1/q}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Hölderungleichung: Es gilt für $f \in L^p$, $g \in L^q$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *die Ungleichung*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \,.$$